حل معادلة الدرجة الثانية فى مجهول واحد

حل معادلة الدرجة الثانية

المعادلة العامة التربيعية تسمى معادلة الدرجة الثانية أو معادلة القطع المكافئ حيث أنها تمثل بيانيا بقطع مخروطى له فرعان متكافئان

الصورة العامة للمعادلة :

$أ س^2 + ب س + جـ = صفر$

$\forall$ أ ، ب ، جـ $\in$ ح ، أ $\neq$ ٠

أى أن أى معادلة على الصورة أ س ^٢ + ب س ^١ + جـ = ٠ تحل على أنها معادلة من الدرجة الثانية ومن أمثلة ذلك :

$س^8 + ٥ س^4 + ٦ = ٠$ ، أ، $س^{100} - ٧ س^{50} + ١٢ = ٠$

إيجاد حل المعادلة التربيعية (جذريها)

معادلة الدرجة الثانية تحل بطريقتين وهما :

الطريقة الجبرية

معادلة الدرجة الثانية تحل بطريقتين جبريا

(١) **بالتحليل** : إذا كانت جذورها أعداد نسبية

(٢) **بالقانون** : إذا كانت جذورها أعداد غير نسبية

وهذا القانون توصل إليه العالم الهندى براهما جويتا وكان يوجد حل وحيد للمعادلة وهو

المعادلة أ $س^2$ + ب س + جـ = ٠ لها جذران هما

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

ومن الملاحظ أن إستخدام القانون لا ينطبق فقط على المعادلات التى جذورها أعداد غير نسبية ولكن يمكن إستخدام القانون فى أى حالة من حالات معادلة الدرجة الثانية

ملاحظات مهمة :

(١) إذا كانت المعادلة أ $س^2$ + ب س + جـ = ٠ لها جذرين حقيقين وهما ل ، م فإن :

(س – ل) ، (س – م) تسمى عواملها

(٢) إذا كان (س + ك) عامل من عوامل المعادلة التربيعية فإن س = - ك يكون أحد جذورها والعكس

- س = $\frac{ك}{ل}$ أحد جذورها فإن (ل س - ك) أحد عواملها
- (ل س - ك) عامل فإن س = $\frac{ك}{ل}$ جذر لها

(٣) إذا كان س = ل أحد جذور المعادلة فإنه يحقق المعادلة

مثال ١ : أوجد مجموعة حل المعادلات الأتية :

(١) $س^2 + س = ٠$ (٢) $س^2 + ١٦ = ٠$

(٣) $٤س^2 - ٩ = ٠$ (٤) $س^2 - ٥ س + ٦ = ٠$

(٥) $س + \frac{٥}{س} = ٤$ (٦) $\frac{٦}{س} - س = \frac{٥}{٢}$ $\forall$ س $\neq$ ٠

الحل

(١) $س^2 + س = ٠$ يتم تحليل المقدار

$س(س + ١) = ٠ \Leftarrow س = ٠$ ، $س = -١$

$\therefore$ م ح = { ٠ ، -١ }

(٢) $س^2 + ١٦ = ٠$ معادلة تربيعية حدية

$س^2 = -١٦ \Leftarrow س = \pm\sqrt{-١٦} \notin ح$

م ح = ϕ

(٣) $٤ س^2 - ٩ = ٠$ معادلة تربيعية حدية

$٤ س^2 = ٩ \Leftarrow س^2 = \frac{٩}{٤} \Leftarrow س = \pm \sqrt{\frac{٩}{٤}} = \pm \frac{٣}{٢}$

م ح = { $\frac{٣}{٢}$ ، - $\frac{٣}{٢}$ }

حل أخر :

$٤س^2 - ٩ = ٠$ بتحليل المقدار

$(٢ س - ٣)(٢ س + ٣) = ٠$

$س = \frac{٣}{٢}$ $س = -\frac{٣}{٢} \Leftarrow$ م ح = { $\frac{٣}{٢}$ ، - $\frac{٣}{٢}$ }

(٤) متروك

(٥) $س + \frac{٥}{س} = ٤$ بالضرب فى س للمعادلة

$س^2 + ٥ = ٤ س \Leftarrow س^2 - ٤ س + ٥ = ٠$

ولا يمكن تحليل المقدار السابق لانه لا يوجد عددين نسبيين ضربهما ٥ وجمعهما ٤

لذا نستخدم القانون لعام لحل المعادلات وهو

$$\frac{- ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

أ = ١ ، ب = -٤ ، جـ = ٥

المميز $ب^2 - ٤ أ جـ = (-٤)^2 - ٤ \times ١ \times ٥ = ١٦ - ٢٠$

$= -٤$

$\therefore$ المعادلة ليس لها حل فى ح لماذا ؟

(٦) متروك

مثال ٢ : حل المعادلات الأتية:

(١) س٢ - ١٠ س + ٢٢ = ٠   (٢) س٢ – ١٠ س + ٢٣ = ٠

(٣) (س -١١) - س(س -٦) = ٠

(٤) س/(س+١) + ٢/(س-١) = ٣   ∀ س ∉ {١ ، -١}

الحل

(١) س٢ -١٠ س + ٢٢ = ٠ هذا المقدار لا يمكن تحليله لماذا ؟

ا=١ ، ب = -١٠ ، هـ = ٢٢

س = (-ب ± √(ب٢ – ٤ا هـ)) / ٢ا

نوجد ب٢ – ٤ ا هـ

∴ ب٢ – ٤ ا هـ = (-١٠)٢ – ٤ × ١ × ٢٢ = ١٠٠ – ٨٨ = ١٢

√١٢ = √(٤×٣) = ٢√٣

∴س = (١٠ ± √١٢)/(٢×١) = (١٠ ± ٢√٣)/٢ = ٥ ± √٣

م ح = { ٥+ √٣ ، ٥ - √٣ }

(٢) بنفسك

(٣) (س -١١) - س(س -٦) =٠

س – ١١ – س٢ + ٦ س = ٠

⟸ – س٢ + ٧س – ١١ =٠

وبالضرب × -١ ⟸ س٢ – ٧ س + ١١ = ٠

المعادلة ليس لها تحليل لذا فإن:

ا=١ ، ب = -٧ ، هـ = ١١

نوجد ب٢ – ٤ ا هـ

ب٢ – ٤ ا هـ =(-٧)٢ – ٤ × ١ × ١١ = ٤٩ – ٤٤ = ٥

∴ س = (٧ ± √٥)/(٢×١) = (٧ ± √٥)/٢

∴م ح = { (٧+√٥)/٢ ، (٧-√٥)/٢ }

(٤) س/(س+١) + ٢/(س-١) = ٣ بالضرب × (س +١) (س - ١)

س(س - ١) + ٢(س + ١) = ٣ (س + ١) (س - ١)

س٢ – س + ٢ س +٢ = ٣(س٢ – ١)

س٢ + س + ٢ = ٣ س٢ - ٣

٣س٢ – س٢ – س -٢ – ٣ =٠ ⟸ ٢س٢ – س – ٥ = ٠

المعادلة ليس لها تحليل

∴ نستخدم القانون العام لحل المعادلات

ا=٢ ، ب = -١ ، هـ = -٥

أكمل بنفسك

مثال ٣ : أوجد قيمة ا ثم اوجد الجذر الأخر للمعادلة فى كلا مما يأتى :-

(١) إذا كان س = ١ أحد جذرى المعادلة س٢ + س – ا = ٠

(٢) س = ٢ أحد جذرى المعادلة ا س٢ - ٩ س + ٢ا = ٠

(٣) س = ٢ أحد جذرى المعادلة ا س٢ – ٣ س + ٢= ٠

الحل

(١) ∵ س = ١ أحد جذورها ∴ س = ١ يحقق المعادلة

س٢ + س – ا = ٠ ⟸ (١)٢ + (١) – ا = ٠

١ + ١ – ا = ٠ ⟸ ٢ – ا =٠ ⟸ ا = ٢

(٢) س=٢ يحقق المعادلة ⟸ ا س٢ -٩س+ ٢ا = ٠

ا(٢)٢ – ٩ ×٢ + ٢ا = ٠ ⟸ ٤ا -١٨ + ٢ا =٠

٦ا – ١٨ = ٠ ⟸ ٦ا = ١٨ ⟸ ا = ٣

(٣) متروك للطالب

مثال ٤ : إذا كان ٣ ، ٤ هما جذرا المعادلة ا س٢ + ب س + ٦ = ٠ فأوجد قيمة كلا من ا ، ب

الحل

∴ ٣ ، ٤ جذرين للمعادلة ∴ فإنهما يحققان المعادلة

عندما س = ٣

ا(٣)٢ + ب(٣) + ٦ =٠ ⟸ ٩ ا +٣ب + ٦ = ٠

٩ ا + ٣ب = -٦   ÷ ٣

⟸ ٣ ا + ب = -٢ ——— (١)

عندما س = ٤

ا(٤)٢ + ب(٤) + ٦ =٠

⟸ ١٦ا + ٤ ب + ٦ = ٠   ÷ ٢

٨ا + ٢ ب + ٣ =٠

⟸ ٨ا + ٢ ب = -٣ ——— (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) أنيا

٣ ا + ب = -٢   × -٢   × ٨

٨ا + ٢ ب = -٣   × ١   × -٣

-٦ ا – ٢ ب = ٤   ٢٤ ا + ٨ ب = -١٦

٨ ا + ٢ ب = -٣   - ٢٤ ا – ٦ ب = ٩

٢ ا = ١   ٢ ب = -٧

∴ ا = ١/٢   ب = -٧/٢

حل أخر

∵ ٣ ، ٤ جذرين للمعادلة

لذا فإن عواملها (س-٣) ، (س-٤)

أى أن المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

(س-٣)(س-٤)=٠ ⟸ س^{٢} - ٤س - ٣س +١٢ =٠

س^{٢} - ٧س + ١٢ =٠ ⟸ بالمقارنة مع

أ س^{٢} + ب س + ٦ = ٠ × ٢

٢ أ س^{٢} + ٢ ب س + ١٢ = ٠

٢أ = ١   ٢ب = -٧

أ = $\frac{١}{٢}$ ب = $\frac{-٧}{٢}$

مثال٥ : أوجد قيمة أ ، ب فى المعادلة س^{٢} + أ س + ب =٠ إذا كان جذريها :-

▪ √٣ ، -√٣   ▪ √٢ +١ ، √٢ -١

الحل

√٣ ، -√٣ جذور للمعادلة

∴ (س + √٣)(س – √٣) عوامل المعادلة

∴ يمكن كتابة المعادلة على الصورة :

(س + √٣)(س – √٣) = ٠

س^{٢} – ٣ = ٠ وبالمقارنة مع س^{٢} + أ س + ب = ٠

أ = ٠ ، ب = -٣

تدريب :

☹ إذا كان ١ ، ٣ جذرا المعادلة أ س^{٢} + (ب - ١) س +٣ =٠ أوجد قيمتى أ ، ب

الطريقة البيانية

وهى طريقة يتم فيها رسم منحنى الدالة على الشبكة التربيعية وبالتالى تكون مجموعة حل المعادلة هى نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات وبالتالى فهناك ثلاثة اوضاع لمنحنى الدالة هى كالتالى :

حل معادلة الدرجة الثانية بيانيا

المعادلة التربيعية (معادلة الدرجة الثانية) يكون لها

حلان فى ح :

إذا كان المميز ب^{٢} – ٤أ جـ >٠ (موجب)

ومنحنى الدالة فى هذه الحالة يقطع المحور س فى نقطتين هما حل المعادلة

حل وحيد فى ح :

إذا كان المميز ب^{٢} – ٤أ جـ = ٠

ومنحنى الدالة فى هذه الحالة يمس المحور س فى نقطة واحده وتكون هى الحل

ليس لها حل فى ح :

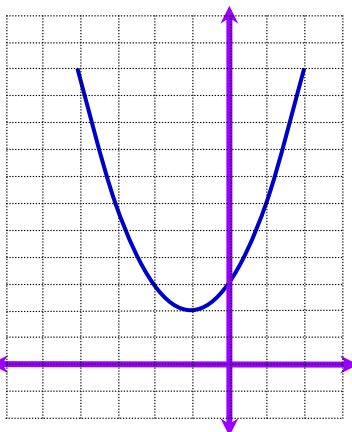
إذا كان المميز ب^{٢} - ٤أ جـ <٠ (سالب)

ومنحنى الدالة فى هذه الحالة لا يقطع المحور س فى أى نقطة

مثال ١ : ارسم الشكل البيانى لكلا من الأشكال الأتية ثم حل المعادلة ومن الرسم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى ورأس المنحنى

(١) د(س) = س^{٢} + ٢س + ٣ ∀ س ∈ [-٣ ، ١]

الحل

س	س^{٢}	٢س	٣	ص
-٣	٩	-٦	٣	٦
-٢	٤	-٤	٣	٣
-١	١	-٢	٣	٢
٠	٠	٠	٣	٣
١	١	٢	٣	٦

من الرسم نجد أن المنحنى لا يقطع محور السينات فى أى نقطة

∴ المعادلة ليس لها حل

▪ رأس المنحنى (-١ ، ٢)

▪ الدالة لها قيمة صغرى = ٢

▪ محور التماثل للدالة هو المستقيم س= -١

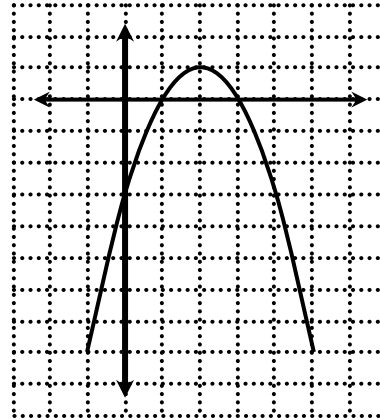
▪ مجال الدالة = ح

▪ مدى الدالة = [٢ ، ∞[

(٢) د(س) = ٤ س – س٢ - ٣ ∀ س ∈ [٠ ، ٤]

الحل

د(س) = - س٢ + ٤ س – ٣

س	- س٢	٤س	-٣	ص
٠	٠	٠	-٣	-٣
١	-١	٤	-٣	٠
٢	-٤	٨	-٣	١
٣	-٩	١٢	-٣	٠
٤	-١٦	١٦	-٣	-٣

من الرسم نجد أن :
منحنى الدالة يقطع محور السينات فى نقطتين هما { ١ ، ٣ }
- رأس المنحنى (٢ ، ١)
- المنحنى له قيمة عظمى وهي = ١
- الدالة لها محور تماثل وهو س = ٢
- مجال الدالة = ح
- مدى الدالة =] - ∞ ، ١]
- ⊙ مدى الدالة = [٠ ، ∞ [

من السابق نلاحظ أن :

(١) المنحنيات فى الأمثلة ١ ، ٢ يمثل دالة لأن أى خط رأسى يرسم فإنه يقطع منحنى الدالة فى نقطة واحدة فقط

(٢) مجال كلا من الدوال الأتية هو ح وكذلك أى كثيرة حدود فإن مجالها ح

(٣) مدى الدالة : هو أول وأخر الدالة على محور الصادات وكلا من مجال ومدى الدالة سيتم التعرف عليهم بشكل دقيق فى الصف الثانى الثانوى

الأعداد المركبة

مجموعة حل المعادلة $س^2 = -1$ في ح تساوي ∅
لانه لا يوجد عدد حقيقى مربعه = -1 ولهذا كانت هناك حاجة لتوسيع مجموعة الاعداد الحقيقية مما أوجد مجموعة جديدة هى مجموعة الاعداد المركبة

العدد التخيلي ت

يعرف العدد التخيلي ت بأنه العدد الذي مربعه يساوي (-1)
أى أن $ت^2 = -1 \Leftarrow ت = \sqrt{-1}$
وتسمي الأعداد علي الصورة ٢ ت ، -٥ ت ، ٤ ت بالأعداد التخيلية

أمثلة

(١) $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \times -1} = \pm 3\sqrt{-1} = \pm 3ت$

(٢) $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \times -1} = \sqrt{16}\ ت^2 = \pm 4ت$

(٣) $\sqrt{-25} = \sqrt{25 \times -1} = \sqrt{25}\ ت^2 = \pm 5ت$

قوى العدد التخيلى ت الصحيحة

نعرف من السابق أن $ت = \sqrt{-1}$ ، $ت^2 = -1$

$ت^3 = ت^2 \times ت = -1 \times ت = -ت$

$ت^4 = ت^2 \times ت^2 = -1 \times -1 = 1$

$ت^5 = ت^4 \times ت = 1 \times ت = ت$

بوجه عام :

$ت^{4ن} = 1$ ، $ت^{4ن+1} = ت$

$ت^{4ن+2} = -1$ ، $ت^{4ن+3} = -ت$

وللتبسيط نطبق القاعدة الأتية :

(١) إذا كان الأس يقبل القسمة على العدد ٤ سواء كان موجبا او سالبا يكون الناتج = ١

(٢) إذا كان الاس يقبل القسمة على ٢ سواء كان موجبا أو سالبا يكون الناتج - بحيث لا يقبل على 4

(٢) إذا كان الأس عدد موجب نطرح منه أكبر عدد يقبل القسمة على ٤ ويكون أقل من الأس

(٣) إذا كان الأس عدد سالب نجمع عليه أقل عدد يقبل القسمة على ٤ بحيث يكون اكبر من الأس
ثم بعد ذلك ما يتبقى من الجمع او الطرح يكون أحد الأتي $ت$ = نفسها ، $ت^2 = -1$ ، $ت^3 = -ت$

ملاحظات مهمة :

(١) $3ت^2 = -3$
أى أن العدد $ت^2$ يغير إشارة العدد مباشرة

(٢) $6ت^3 = -6ت$
أى أن العدد $ت^3$ تغير اشارة المعامل لها وتترك ت بجوار العدد

(٣) $5ت^4 = 5$
أى أن العدد $ت^4$ لا يؤثر فى معامله لأنه = ١

مثال ١ : اختصر لأبسط صورة كلا من الأعداد التخيلية الأتية

(١) $ت^{45}$ (٢) $ت^{62}$ (٣) $ت^{31}$ (٤) $ت^{80}$
(٥) $ت^{-65}$ (٦) $ت^{-49}$ (٧) $ت^{-14}$ (٨) $ت^{-16}$

الحل

(١) $ت^{45}$ الأس عدد موجب لذا نبحث عن أكبر عدد اقل من ٤٥ ويقبل القسمة على ٤ ثم نطرحه من الأس ٤٥ وهذا العدد هو ٤٤ $ت^{45-44} = ت$

(٢) $ت^{62} = -1$
الاس ٦٢ وهو عدد يقبل القسمة على ٢ ولا يقبل القسمة على ٤ ∴ الناتج = -١

(٣) $ت^{31-28} = ت^3 = -ت$
لأن اكبر عدد يقبل القسمة على ٤ واصغر من ٣١ هو ٢٨ لذا طرحنا من الأس ٢٨

(٤) $ت^{80} = 1$ لأن الأس يقبل القسمة على ٤

(٥) $ت^{-65}$ الأس سالب لذا نبحث عن أصغر عدد يقبل القسمة على ٤ ويكون اكبر من ٦٥ وهو ٦٨ لذا نضيف للأس ٦٨ $ت^{-65} = ت^{-65+68} = ت^3 = -ت$

(٦) $ت^{-49}$ أصغر عدد يقبل القسمة على ٤ واكبر من ٤٩ هو ٥٢ لذا نضيف ٥٢ للأس
$\Leftarrow ت^{-49+52} = ت^3 = -ت$

(٧) $ت^{-14} = -1$

(٨) $ت^{-16} = 1$ لأن الأس يقبل القسمة على ٤ وإن كان سالبا

مثال ٢ أوجد قيمة كلا مما يأتى فى ابسط صورة

(١) $ت^{4ن+17}$ (٢) $ت^{4ن+3}$ (٣) $ت^{4ن-15}$

الحل

(١) $ت^{٤ن + ١٧}$ العدد ٤ن يقبل القسمة على ٤ مهما كانت ن

∴ $ت^{٤ن + ١٧} = ت^{١٧ - ١٦} = ت$

(٢) $ت^{٤ن + ٣} = ت^{٣} = -ت$

(٣) $ت^{٤ن - ١٥} = ت^{-١٥} = ت^{-١٥ + ١٦} = ت$

العدد المركب

هو ذلك العدد الذى يتركب من عدد حقيقى وأخر تخيلى

ويكون فى الصورة ⟸ $ﺃ + ب ت$

ويسمى ﺃ بالجزء الحقيقى ويسمى ب بالجزء التخيلى

وذلك علما بأن كلا من العددين ﺃ ، ب أعداد حقيقية

- يقال أن العدد المركب عدد حقيقى صرف

إذا كانت ب = ٠ **مثل** ⟸ ع = ٢ أ ع = -٤

- يقال أن العدد المركب تخيلى صرف

إذا كانت ﺃ = ٠ **مثل** ⟸ ع = ٢ت أ ع = -٥ت

ويرمز للأعداد المركبة بالرمز ك

مثال ١ : أوجد الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية فى كلا من الأعداد المركبة الأتية

(١) ع = ٣ + ٢ت (٢) ع = -٣ + ٥ت

(٣) ع = ٤ − ٢ت (٤) ع = ٢ + ت

(٥) ع = ٣ت (٦) ع = ١

الحل

(١) ع = ٣ + ٢ت

الجزء الحقيقى = ٣ ، الجزء التخيلى = ٢

(٢) ع = -٣ + ٥ت

الجزء الحقيقى = -٣ ، الجزء التخيلى = ٥

(٣) ع = ٤ − ٢ت

الجزء الحقيقى = ٤ ، الجزء التخيلى = -٢

(٤) ع = ٢ + ت

الجزء الحقيقى = ٢ ، الجزء التخيلى = ١

(٥) ع = ٣ت

الجزء الحقيقى = ٠ ، الجزء التخيلى = ٣

(٦) ع = ١

الجزء الحقيقى = ١ ، الجزء التخيلى = ٠

مثال ٢ : حل كلا من المعادلات الأتية

(١) $٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١$ (٢) $٣س^{٢} + ٢٧ = ٠$

(٣) $٥س^{٢} + ٢٤٥ = ٠$ (٤) $٤س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥$

الحل

(١) $٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١$

$٩س^{٢} = ٦١ - ١٢٥ = -٦٤$ ⟸ $٩س^{٢} = -٦٤$

∴ $س^{٢} = \frac{-٦٤}{٩}$ وبأخذ $\sqrt{\ }$ للطرفين

$س^{٢} = \frac{-٦٤}{٩}$ ⟸ $س = \pm \frac{٨}{٣} ت$

$م.ح = \{ \pm \frac{٨}{٣} ت \}$

(٢) $٣س^{٢} + ٢٧ = ٠$ ⟸

$٣س^{٢} = -٢٧$ ⟸ $س^{٢} = \frac{-٢٧}{٣} = -٩$

$س^{٢} = -٩$ ⟸ $\sqrt{س^{٢}} = \sqrt{-٩}$

∴ $س = \pm ٣ت$ $م.ح = \{ \pm ٣ت \}$

(٣) $٥س^{٢} + ٢٤٥ = ٠$ متروك للطالب

(٤) $٤س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥$

$٤س^{٢} = ٧٥ - ١٠٠ = -٢٥$

$س^{٢} = \frac{-٢٥}{٤}$ ⟸ $\sqrt{س^{٢}} = \sqrt{\frac{-٢٥}{٤}}$

∴ $س = \pm \frac{٥}{٢} ت$ ∴ $م.ح = \{ \pm \frac{٥}{٢} ت \}$

تساوي عددين مركبين

إذا كان $ﺃ + ب ت = ﻫ + ء ت$ فإن :

⟸ ﺃ = ﻫ ، ب = ء

أى أنه إذا تساوى عددين مركبين فإن

- الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي
- الجزء التخيلي = الجزء التخيلي

إنعدام العدد المركب

إذا كان $ﺃ + ب ت =$ صفر فإن :

⟸ ﺃ = صفر ، ب = صفر

إذا ساوى العدد المركب صفرا فإن :

- الجزء الحقيقي = صفر
- الجزء التخيلي = صفر

مثال ١ : أوجد قيمة س ، ص فيما يأتى

(١) (٢ س + ١) + ٤ ص ت = ٥ – ١٢ ت
(٢) ٢ س – ٣ + (٣ ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت
(٣) ٢ س – ص + (س – ٢ ص) ت = ٥ +١٠ ت

الحل

(١) (٢ س + ١) + ٤ ص ت = ٥ – ١٢ ت

∴ ٢ س + ١ = ٥ ، ٤ ص = -١٢
٢ س = ٥ – ١ = ٤ ،
س = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ص = $\frac{-١٢}{٤}$ = -٣

(٢) ٢ س – ٣ + (٣ ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

٢ س – ٣ = ٧ ، ٣ ص + ١ = ١٠
٢ س = ٧ + ٣ = ١٠ ، ٣ ص = ١٠ – ١ = ٩
س = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ ، ص = $\frac{٩}{٣}$ = ٣

(٣) ٢ س – ص + (س – ٢ ص) ت = ٥ + ١٠ ت

٢ س – ص = ٥ ، س – ٢ ص = ١٠
وبحل هاتان المعادلتان أنيا وذلك كالتالى :
٢ س - ص = ٥ ——— (١) × ١ × ٢
س - ٢ س = ١٠ ——— (٢) ×- ٢ ×- ١

٢ س - ص = ٥ ٤س - ٢ ص = ١٠
-٢ س + ٤ ص = - ٢٠ - س +٢ ص = - ١٠
٠ + ٣ ص = - ١٥ ٣ س+ ٠ = ٠
∴ ص = $\frac{-١٥}{٣}$ = -٥ س = $\frac{٠}{٣}$ = ٠

مثال ٢ : أوجد قيمة س ، ص فيما يأتى

(١) س + ت ص = (٢ + ٣ ت)^{٢}
(٢) ٢ س + ٤ ت ص = (٤ – ٢ ت)^{٢}
(٣) س + ت ص = (١ + ٢ ت)^{٣}

الحل

(١) س + ت ص = (٢ + ٣ ت)^{٢} = ٤ + ٩ ت^{٢} + ١٢ ت
= ٤ – ٩ + ١٢ ت = - ٥ + ١٢ ت
∴ س = - ٥ ، ص = ١٢

(٢) ٢ س + ٤ ت ص = (٤ – ٢ ت)^{٢}
= ١٦ + ٤ ت^{٢} - ١٦ ت
= ١٦ – ٤ – ١٦ ت = ١٢ – ١٦ ت
٢ س = ١٢ ⟸ س = ٦
٤ ص = - ١٦ ⟸ ص = - ٤

(٣) س + ت ص = (١ + ٢ ت)^{٣}
= (١ + ٢ ت)^{٢} (١+٢ ت)
= (١ + ٤ ت + ٤ ت^{٢}) (١ + ٢ ت)
= (١ – ٤ + ٤ ت) (١ + ٢ ت)
= (-٣ + ٤ ت) (١ + ٢ ت)
= - ٣ – ٦ ت + ٤ ت + ٨ ت^{٢}
= - ٣ – ٨ - ٢ ت = - ١١ – ٢ ت
∴ س = - ١١ ، ص = - ٢

العمليات على الأعداد المركبة

العمليات على الأعداد المركبة هى الجمع والطرح والضرب والقسمة وخواصها هى الإنغلاق والإبدال والدمج والمحايد والمعكوس وسنتناول بسرعة هذه العمليات والخواص فيما يأتى :
نفرض أنه لدينا عددان مركبان هما
ع$_{١}$ = س$_{١}$ + ت ص$_{١}$ ، ع$_{٢}$ = س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$ فإن :

العمليات على الأعداد المركبة تكون كالتالى :

(١) ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ + س$_{٢}$) + ت (ص$_{١}$ + ص$_{٢}$)
(٢) ع$_{١}$ - ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ - س$_{٢}$) + ت (ص$_{١}$ - ص$_{٢}$)
(٣) ع$_{١}$ × ع$_{٢}$ =
= (س$_{١}$ س$_{٢}$ – ص$_{١}$ ص$_{٢}$) + ت (س$_{١}$ ص$_{٢}$ + س$_{٢}$ ص$_{١}$)
(٤) $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ = $\frac{س_{١} + ص_{١}}{س_{٢} + ص_{٢}}$

ويتم ضرب العدد بسطا ومقاما فى مرافق المقام وذلك سيأتى ذكره فى العددان المترافقان

خواص العمليات على الأعداد المركبة :

(١) الإنغلاق :

∀ ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ∈ ك فإن :
ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ ∈ ك ، ع$_{٢}$ + ع$_{١}$ ∈ ك
ع$_{١}$ × ع$_{٢}$ ∈ ك ، ع$_{٢}$ × ع$_{١}$ ∈ ك

(٢) الإبدال :

∀ ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ∈ ك فإن :
ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = ع$_{٢}$ + ع$_{١}$
ع$_{١}$ × ع$_{٢}$ = ع$_{٢}$ × ع$_{١}$

(٣) الدمج (التجميع) :

∀ ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$ ∈ ك فإن :
(ع$_{١}$ + ع$_{٢}$) + ع$_{٣}$ = ع$_{١}$ + (ع$_{٢}$ + ع$_{٣}$)

(ع$_١$ × ع$_٢$) × ع$_٣$ = ع$_١$ × (ع$_٢$ × ع$_٣$)

(٤) العنصر المحايد

يوجد عنصر محايد جمعى لأى عدد مركب وهو **الصفر**
ويوجد عنصر محايد ضربى لأى عدد مركب وهو **الواحد**

(٥) العنصر المعكوس :

الجمعى : ∀ ع ∈ ك يوجد - ع ∈ ك بحيث :
إذا كان : ع = س + ت ص
فإن : - ع = - س – ت ص

الضربى : ∀ ع ∈ ك يوجد ع$^{-١}$ ∈ ك بحيث :
إذا كان : ع = س + ت ص
فإن : ع$^{-١}$ = س / (س^٢ + ص^٢) – ص / (س^٢ + ص^٢)

مثال ١ : أوجد قيمة ما يلى فى ابسط صورة
(١) (٧ – ٤ت) + (٢ + ت)
(٢) (١٢ – ٥ت) - (٧ – ٩ت)
(٣) (٢ + ٣ت) (٣ – ٤ت)
(٤) (٤ – ٣ت) (٤ + ٣ت)
(٥) (٥ – ٦ت) (٣ + ٢ت)

الحل

(١) (٧ – ٤ت) + (٢ + ت)
= (٧ + ٢) + (-٤ + ٢) ت = ٩ – ٢ت

(٢) (١٢ – ٥ت) - (٧ – ٩ت)
= ١٢ – ٥ت – ٧ + ٩ت
= (١٢ – ٧) + (-٥ + ٩) ت = ٥ + ٤ت

(٣) (٢ + ٣ت) (٣ – ٤ت)
= ٦ – ٨ت + ٩ت – ١٢ت^٢
= ٦ + ١٢ + ت = ١٨ + ت

(٤) (٤ – ٣ت) (٤ + ٣ت)
= ١٦ + ١٢ت – ١٢ت – ٩ت^٢
= ١٦ + ٩ = ٢٥

(٥) (٥ – ٦ت) (٣ + ٢ت)
= ١٥ + ١٠ت – ١٨ت – ١٢ت^٢
= ١٥ + ١٢ – ٨ت = ٢٧ – ٨ت

مثال ٢ : أوجد قيمة س ، ص فيما يلى :
(١) س + ت ص = (٢ + ٣ت) (١ + ٢ت)
(٢) ٢س + ٤ت ص = (٤ – ٢ت) (٤ + ٢ت)
(٣) س + ت ص = (١ + ٢ت) (١ – ٢ت) ت

الحل

(١) س + ت ص = (٢ + ٣ت) (١ + ٢ت)
= (٢ + ٤ت + ٣ت + ٦ت^٢) = ٢ – ٦ + ٧ت
= - ٤ + ٧ت وهو عدد مركب
∴ س = - ٤ ، ص = ٧

(٢) ٢س + ٤ت ص = (٤ – ٢ت) (٤ + ٢ت)
= ١٦ + ٨ت – ٨ت – ٤ت^٢
= ١٦ + ٤ = ٢٠ وهو عدد حقيقى صرف
∴ ٢س = ٢٠ ⟸ س = ١٠
٤ص = ٠ ⟸ ص = ٠

(٣) س + ت ص = (١ + ٢ت) (١ – ٢ت) ت
= (١ - ٢ت + ٢ت – ٤ت^٢) ت
= (١ + ٤) ت = ٥ت وهو عدد تخيلى صرف
∴ س = ٠ ، ص = ٥

العددان المترافقان

هما العددان المركبان المتشابهان تماما فى الأجزاء الحقيقية والتخيلية ولكنهما يختلفان فى إشارة الجزء التخيلى
فهما على الصورة : ⟸ أ + ب ت ، أ – ب ت

أمثلة على العددان المترافقان :
(١) ٢ + ٥ت ، ٢ – ٥ت
(٢) ٣ + ٤ت ، ٣ – ٤ت
(٣) -٣ + ٥ت ، -٣ – ٥ت

خواص العددان المترافقان

(١) حاصل جمعهما يون عدد حقيقى صرف
(٢) حاصل طرحهما يكون عدد تخيلى صرف
(٣) حاصل ضربهما دائما عدد حقيقى
فحاصل ضرب العددان أ + ب ت ، أ – ب ت هو كالتالى
(أ + ب ت) (أ - ب ت) = أ^٢ + ب^٢

مثال ١ : أوجد قيمة ما يلي

(١) (٣ − ٢ت) (٣ + ٢ت) = ٩ + ٤ = ١٣

(٢) (-٢ + ٥ت) (-٢ − ٥ت) = ٤ + ٢٥ = ٢٩

(٣) (٨ + ٣ت) (٨ − ٣ت) =

(٤) (-٢ + ٧ت)(-٢ - ٧ت) =

مثال ٢ : ضع الأعداد الأتية فى الصورة س + ت ص

(١) $\frac{١}{٣ - ٢ب}$ (٢) $\frac{٣ + ٤ب}{٣ - ٤ب}$ (٣) $\frac{٥ب}{٥ - ١٢ب}$

الحل

١) لجعل العدد $\frac{١}{٣ - ٢ب}$

يجب جعل المقام عدد حقيقى صرف أو تخيلي صرف وذلك بضرب العدد بسطا ومقاما فى مرافق المقام

$\frac{١}{٣ - ٢ب} \times \frac{٣ + ٢ب}{٣ + ٢ب} = \frac{٣ + ٢ب}{٩ + ٤} = \frac{٣ + ٢ب}{١٣} = \frac{٣}{١٣} + \frac{٢}{١٣}$ ت

(٢) بضرب العدد بسطا ومقاما فى مرافق المقام

$\frac{٣ + ٤ب}{٣ - ٤ب} \times \frac{٣ + ٤ب}{٣ + ٤ب} = \frac{٩ + ١٢ب + ١٢ب + ١٦ب^٢}{٩ + ١٦}$

$= \frac{٩ + ٢٤ب - ١٦}{٩ + ١٦} = \frac{-٧ + ٢٤ب}{٢٥} = \frac{-٧}{٢٥} + \frac{٢٤}{٢٥}$ ت

(٣) $\frac{٥ب}{٥ - ١٢ب} \times \frac{٥ + ١٢ب}{٥ + ١٢ب} = \frac{٢٥ب + ٦٠ب^٢}{٢٥ + ١٤٤} = \frac{٢٥ب - ٦٠}{١٦٩} =$

$- \frac{٦٠}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩}$ ت

مثال ٣ : أوجد فى ابسط صورة كلا مما يأتى

(١) $\frac{٤ - ٦}{٢}$ (٢) $\frac{٣٦}{٣ - ٢}$

(٣) $\frac{-٣}{-٢}$ (٤) $\frac{٣ + ٤}{٥ - ٢}$

الحل

(١) $\frac{٤ - ٦}{٢} = \frac{٤}{٢} - \frac{٦}{٢} = \frac{٤ب^٤}{٢ب} - ٣ = ٢ت^٣ - ٣$

= -٢ت − ٣

(٢) $\frac{٣٦}{٣ - ٢ب} \times \frac{٣ + ٢ب}{٣ + ٢ب} = \frac{٧٨ + ٥٢ب}{٩ + ٤} = \frac{٧٨ + ٥٢ب}{١٣}$

$= \frac{٧٨}{١٣} + \frac{٥٢}{١٣}$ ت = ٦ + ٤ت

(٣) $\frac{٣ - ب}{٢ - ب} \times \frac{٢ + ب}{٢ + ب} = \frac{٦ + ٣ب - ٢ب - ب^٢}{٤ + ١}$

$= \frac{٦ + ب + ١}{٤ + ١} = \frac{٧ + ب}{٥} = \frac{٧}{٥} + \frac{١}{٥}$ ت

(٤) متروك للطالب

مثال ٤ : أوجد قيمة س ، ص فى كلا مما يأتى

(١) س + ت ص = ٢ ت$^{-١}$ + ٤ ت^{٢} + ٣ت

(٢) س + ت ص = $\frac{(٢ + ب)(٢ - ب)}{٣ + ٤ب}$

(٣) س + ت ص = (٢ ت ٢ ت) (٢ + ٢ت) ت

الحل

١) س + ت ص = ٢ ت$^{-١}$ + ٤ ت^{٢} + ٣ت

= ٢ ت$^{-١ + ٤}$ + (-٤) + ٣ت = ٢ ت^{٣} -٤ + ٣ت

= -٢ت - ٤ + ٣ت = -٤ + ت

⟸ س = -٤ ، ص = ١

٢) س + ت ص = $\frac{(٢ + ب)(٢ - ب)}{٣ + ٤ب} = \frac{٤ + ١}{٣ + ٤ب} = \frac{٥}{٣ + ٤ب}$

$= \frac{٥}{٣ + ٤ب} \times \frac{٣ - ٤ب}{٣ - ٤ب} = \frac{١٥ - ٢٠ب}{٩ + ١٦} = \frac{١٥ - ٢٠ب}{٢٥}$

$= \frac{١٥}{٢٥} + \frac{-٢٠}{٢٥}$ ت = $\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}$ ت

(٣) متروك للطالب

مثال ٥ : أوجد شدة التيار الكلية المارة فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى = ٥ − ٣ت وشدة التيار فى المقامة الثانية ٢ + ت علما بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المارة فى المقاومتين

الحل

شدة التيار فى المقاومتين =

شدة التيار فى المقاومة الأولى + شدة التنيار فى المقاومة الثانية

= ٥ − ٣ت + ٢+ ت = ٧ − ٢ت

بحث نوع جذرى المعادلة

المعادلة التربيعية $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ ∀ $أ \neq 0$

دائما لها حلان (جذران) هذان الجذران يكونان :

☹ متشابهين ☹ أعداد نسبية

☹ أعداد غير نسبية ☹ أعداد غير حقيقيه

وهذان الجذران نحصل عليهما من القانون العام لحل المعادلات السابق ذكره وهو :

المعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ ∀ $أ \neq 0$ لها جذران

هما $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$

ولكن الذى يحدد نوع الجذرين هو ذلك المقدار الموجود تحت الجذر ويسمى المميز وهو $ب^2 - 4أجـ$ والمميز يصنف أنواع الجذور للمعادلة كالتالى

إذا كان المميز $ب^2 - 4أجـ$

(١) موجب > ٠

فى هذه الحالة يكون الجذرين حقيقين مختلفين نسبيين أو غير نسبيين حسب نوع الجذرين فإذا كان :

المميز مربع كامل

يكون الجذرين حقيقيين نسبيين

المميز ليست مربع كامل

يكون الجذرين حقيقيين غير نسبيين

حل المعادلة بيانيا :

منحنى الدالة

$د(س) = أ س^2 + ب س + جـ = 0$ ∀ $أ \neq 0$

يقطع محور السينات فى نقطتين هما جذرا المعادلة

(١) صفراً = ٠

فى هذه الحالة يكون جذرى المعادلة متساويين (متشابهين أو مكررين) وكلا منهما يساوى $\frac{-ب}{2أ}$

حل المعادلة بيانيا :

منحنى الدالة التربيعية يمس محور السينات عند النقطة $(\frac{-ب}{2أ} ، 0)$

(١) سالب < ٠

فى هذه الحالة لا يكون للمعادلة أى جذور حقيقية ولكن الجذور تكون أعداد مركبة

حل المعادلة بيانيا :

لا يقطع منحنى الدالة أى نقط من المحور س

مثال ١ بين نوع كلا من جذرا المعادلات الأتية

(١) $س^2 - 2س + 5 = 0$ (٢) $س^2 + 9 = 0$

(٣) $3س^2 + 10س - 5 = 0$ (٤) $2س^2 - س + 1 = 0$

الحل

(١) $س^2 - 2س + 5 = 0$

$أ = 1$ ، $ب = -2$ ، $جـ = 5$

المميز $ب^2 - 4أجـ = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 4 - 20 = -16$

المميز عدد سالب لذا فإن :

مجموعة الحل ⊄ ح

(٢) $س^2 + 9 = 0$

$أ = 1$ ، $ب = 0$ ، $جـ = 9$

المميز $ب^2 - 4أجـ = (0)^2 - 4 \times 1 \times 9$

$= 0 - 36 = -36$

المميز عدد سالب لذا فإن مجموعة الحل ⊄ ح

م.ح = { ϕ }

(٣) $3س^2 + 10س - 5 = 0$

$أ = 3$ ، $ب = 10$ ، $جـ = -5$

المميز $ب^2 - 4أجـ = (10)^2 - 4 \times 3 \times -5$

$= 100 + 60 = 160$

∴ المميز عدد موجب ليست مربع كامل

∴ الجذور أعداد حقيقية غير نسبية

(٤) متروك

مثال ٢: أوجد قيم م الحقيقية التي تجعل المعادلة
س٢ - (٢م - ١)س + م٢ = ٠ ليس لها جذور حقيقية

الحل

س٢ - (٢م - ١)س + م٢ = ٠

أ = ١ ، ب = -(٢م - ١) ، جـ = م٢

المعادلة ليس لها حل في ح ∴ المميز < ٠

المميز ب٢ - ٤أجـ < ٠ ⟸

المميز = ب٢ - ٤أجـ = {-(٢م - ١)}٢ - ٤ × ١ × م٢

= ٤م٢ + ١ - ٤م - ٤م٢ < ٠

-٤م + ١ < ٠ ⟸ -٤م < -١ ÷ -٤

م > ١/٤ ⟸ م =]١/٤ ، ∞[

م.ح = {س : س ∈ ح ، س > ١/٤}

مثال ٣: إذا كان جذرا المعادلة ٢س٢ + ن س + ٥ = ٠ متساويين أوجد قيمة ن

الحل

أ = ٢ ، ب = ن ، جـ = ٥

∵ الجذران متساويان ⟸ ∴ المميز = صفر

المميز ب٢ - ٤أجـ = ٠

ن٢ - ٤×٢×٥ = ٠ ⟸ ن٢ - ٤٠ = ٠

⟸ ن٢ = ٤٠

ن = ± √٤٠ = ± ٢√١٠

مثال ٤: أثبت أنه لجميع قيم ل ، م الحقيقيتين يكون جذرا المعادلة (س - ل)(س - م) = ٥ حقيقيين

الحل

(س - ل)(س - ب) = ٥

س٢ - م س - ل س + ل م - ٥ = ٠

س٢ - (م + ل) س + ل م - ٥ = ٠

أ = ١ ، ب = -(م + ل) ، جـ = ل م - ٥

ليكون جذرا المعادلة متساويان فإنه

لا بد أن يكون المميز عدد موجب

المميز = (معامل س)٢ - ٤ × معامل س٢ × الحد المطلق

= (-(م + ل))٢ - ٤ × ١ × (ل م - ٥) =

= م٢ + ٢ل م + ل٢ - ٤ل م + ٢٠

= م٢ - ٢ل م + م٢ + ٢٠

= (م - ل)٢ + ٢٠ وهذا العدد دائما موجب

لذا فإن جذرا المعادلة يكونا حقيقيان

مثال ٥: إذا كان م عدد نسبي فإن جذري المعادلة
٢٥س٢ + ٥(م + ٣) س + ٣م = ٠ يكونان نسبيان

الحل

٢٥س٢ + ٥(م + ٣) س + ٣م = ٠

∴ أ = ٢٥ ، ب = ٥(م + ٣) ، جـ = ٣م

المميز = ب٢ - ٤ أ جـ = (٥(م + ٣))٢ - ٤ × ٢٥ × ٣م

= ٢٥(م٢ + ٦م + ٩) - ٢٥ × ١٢م

= ٢٥[م٢ + ٦م - ١٢م + ٩] = ٢٥(م٢ - ٦م + ٩)

= ٥٢(م - ٣)٢ = [٥(م - ٣)]٢

مربع كامل لذا فإن جذرا المعادلة هي أعداد نسبية

مثال ٦: إذا كان جذرا المعادلة
س٢ - ٢ك س + ٧ك - ٦س + ٩ = ٠
متساويين أوجد قيمة ك

الحل

س٢ - ٢ك س + ٧ك - ٦س + ٩ = ٠

أ = ١ ، ب = (-٢ك - ٦) ، جـ = ٧ك + ٩

الجذران متساويان ∴ المميز = صفر

المميز = ب٢ - ٤ أ جـ

= (-٢ك - ٦)٢ - ٤ × ١ × (٧ك + ٩)

= ٤ك٢ + ٣٦ + ٢٤ك - ٢٨ك - ٣٦

= ٤ك٢ - ٤ك = ٠

٤ك(ك - ١) = ٠

ك = ٠ ، ك = ١

تدريب

(١) أثبت أن جذري المعادلة
س٢ + ك س + ك = ١ ∀ ك ∈ ن دائما نسبيان

(٢) أوجد قيم ك التي تجعل المعادلة
٥س٢ + ٤س + ك = ٠

- حقيقيان متساويان
- حقيقيان مختلفان
- تخيليان

العلاقة بين جذور المعادلة ومعاملاتها

نعلم أن المعادلة أ س^2 + ب س + حـ = ٠ معادلة من الدرجة الثانية لذا ومن النظرية الأساسية فى الجبر يكون لها جذران مهما كانت كينونتهما ونفرض أنهما ل ، م

هذان الجذران ينتجان من القانون

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أحـ}}{٢أ}$$

لذا فإن أحدهما ليكن ل = $\frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤أحـ}}{٢أ}$

والأخر م = $\frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤أحـ}}{٢أ}$ لذا فإنه يكون :

ل + م = $\frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤أحـ}}{٢أ} + \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤أحـ}}{٢أ}$

$= \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤أحـ} - ب + \sqrt{ب^2 - ٤أحـ}}{٢أ}$

$= \frac{-ب - ب}{٢أ} = \frac{-٢ب}{٢أ} = \frac{-ب}{أ}$

∴ ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ ———— (١)

ل م = $\frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤أحـ}}{٢أ} \times \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤أحـ}}{٢أ}$

$= \frac{ب^2 - ب^2 + ٤أحـ}{٤أ^2} = \frac{٤أحـ}{٤أ^2} = \frac{حـ}{أ}$

∴ ل م = $\frac{حـ}{أ}$ ———— (٢)

يمكن إستنتاج حاصل ضرب وجمع الجذرين وذلك بمقارنة المعادلتين :

⊙ ⟸ (س – ل) (س – م) = ٠

⊙ ⟸ أ س^2 + ب س + حـ = ٠

وذلك بعد قسمة المعادلة الثانية على أ

أى أن :

حاصل جمع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2}$

ملاحظات مهمة :

(١) فى المعادلة السابقة إذا كان أ = ١ تصبح المعادلة س^2 + ب س + حـ = ٠ ويكون :

ل + م = - ب ، ل م = حـ

(٢) إذا كانت ب = صفر تصبح المعادلة أ س^2 + حـ = صفر ويكون :

ل + م = صفر ⟸ ل = - م

(٣) إذا كان أ = حـ أى أن معامل س^2 = الحد المطلق تصبح المعادلة أ س^2 + ب س + أ = ٠ ويكون :

ل م = ١ أى أن كلا من الجذرين معكوس ضربى للأخر

مثال ١ : فى المعادلات الأتية أبحث نوع الجذرين وأوجد حاصل جمعهما وضربهما

(١) ٣ س^2 + ٥ = ٤ س (٢) ٢ س^2 + ٣ س – ٥ = ٠

(٣) $\frac{١}{س - ٢} + \frac{١}{س + ٢} = ٣$

الحل

(١) ٣ س^2 + ٥ = ٤ س ⟸ ٣ س^2 – ٤ س + ٥ = ٠

أ = ٣ ، ب = - ٤ ، حـ = ٥

المميز = ب^2 – ٤ أ حـ = (- ٤)^2 – ٤ × ٣ × ٥

= ١٦ – ٦٠ = - ٤٤

عدد سالب ∴ الجذران غير حقيقيان

حاصل الجمع = $\frac{-ب}{أ} = \frac{٤}{٣}$

حاصل الضرب = $\frac{حـ}{أ} = \frac{٥}{٣}$

(٢) ٢ س^2 + ٣ س – ٥ = ٠

أ = ٢ ، ب = ٣ ، ب = - ٥

المميز = ب^2 – ٤ أ حـ = (٣)^2 – ٤ × ٢ × - ٥ =

= ٩ + ٤٠ = ٤٩

المميز مربع كامل لذا فإن الجذور أعداد نسبية

حاصل الجمع = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٣}{٢}$

حاصل الضرب = $\frac{حـ}{أ} = \frac{-٥}{٢}$

(٣) $\frac{١}{س - ٢} + \frac{١}{س + ٢} = ٣$

بضرب طرفى المعادلة فى (س-٢)(س + ٢)

س+٢+س-٢ = ٣(س + ٢)(س - ٢)

⇐ ٢ س = ٣ (س^٢ – ٤)

٢ س = ٣ س^٢ – ١٢ ⇐ ٣ س^٢ – ٢ س – ١٢ = ٠

أكمل بنفسك

مثال ٢ : أوجد قيمة هـ إذا علم أن أحد جذرى المعادلة

(١) س^٢ – ٦ س + هـ = ٠ مربع الجذر الأخر

(٢) أحد جذرى المعادلة س^٢ + ٣ س + هـ = ٠ ضعف الأخر

(٣) النسبة بين جذرى المعادلة : س^٢ – هـ س + ٦ =٠ هى ٢ : ٣

(٤) س^٢ – ١٠ س + هـ =٠ يقل عن مربع الأخر بمقدار ٢

الحل

(١) س^٢ – ٦ س + هـ = ٠

نفرض أن الجذران هما ل ، ل^٢

حاصل الجمع = ل + ل^٢ = $\frac{-ب}{أ} = \frac{٦}{١}$ = ٦

⇐ ل^٢ + ل – ٦ = ٠

(ل - ٢)(ل + ٣) = ٠ ⇐ ∴ ل = ٢ أو - ٣

حاصل الضرب = ل × ل^٢ = $\frac{هـ}{أ} = \frac{هـ}{١}$ = هـ

هـ = ل^٣ :

∴ عند ل = ٢ ∴ هـ = ٢^٣ = ٨

∴ عند ل = - ٣ ∴ هـ = (- ٣)^٣ = - ٢٧

(٢) بنفسك

(٣) النسبة بين جذرى المعادلة : س^٢ – هـ س + ٦ =٠ هى ٢ : ٣

نفرض أن الجذران هما ٢ ل ، ٣ ل

حاصل الجمع = ٢ل + ٣ل = ٥ ل = هـ ——— (١)

حاصل الضرب = ٢ ل × ٣ ل = ٦ ل^٢ = ٦ ⇐ ل^٢ = ١

$\sqrt{ل^٢} = \sqrt{١}$ = ± ١

∴ ل = ± ١ ، هـ = ٥ ل

عند ل = ١ ⇐ هـ = ٥ ل = ٥ × ١ = ٥

عند ل = - ١ ⇐ هـ = ٥ × - ١ = - ٥

(٤) س^٢ – ١٠ س + هـ =٠

احد الجذرين يقل عن مربع الأخر بمقدار ٢

نفرض أن الجذران هما ل ، ل^٢ - ٢

∴ حاصل الجمع = ل + ل^٢ – ٢ = ١٠

⇐ ل^٢ + ل – ٢ – ١٠ = ٠

ل^٢ + ل – ١٢ = ٠

⇐ (ل – ٣) (ل + ٤) = ٠

ل = ٣ ، ل = - ٤

حاصل الضرب = ل (ل^٢ – ٢) = هـ

عندما ل = ٣

⇐ هـ = ٣ (٣^٢ - ٢) = ٣ × ٧ = ٢١

عندما ل =- ٤

⇐ هـ = - ٤ ((- ٤)^٢ - ٢) = - ٤ × ١٤ = - ٥٦

مثال ٣ : إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة ٣ س^٢ – ٢ س + ك = ٠ يساوى ١ أوجد قيمة ك ثم أوجد مجموعة حل المعادلة فى ك

الحل

نفرض أن جزريها هما ل ، م لذا فإن ل م = ١

ل م = $\frac{ك}{٣}$ = ١ ⇐ ك = ٣

∴ المعادلة تصبح ٣ س^٢ – ٢ س + ٣ = ٠

أ = ٣ ، ب = - ٢ ، هـ = ٣

المميز = ب^٢ – ٤ أ هـ = ٤ – ٤ × ٣ × ٣

= ٤ – ٣٦ = - ٣٢

$\sqrt{المميز} = \sqrt{- ٣٢} = \sqrt{١٦ × ٢ ت^٢}$ = ± ٤ $\sqrt{٢}$ ت

س = $\frac{– ب ± \sqrt{ب^٢ – ٤ أ هـ}}{٢ أ}$

= $\frac{٢ ± ٤ \sqrt{٢} ت}{٢}$ = ١ ± ٢ $\sqrt{٢}$ ت

مثال ٤ : إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة س^٢ – ٢ س + أ = ٠ ∀ أ ∈ ح* فأوجد الجذر الأخر وقيمة أ

الحل

إذا كان (١ + ت) أحد جذور المعادلة فإنه حتما يكون (١ – ت) هو الجذر الأخر وذلك لأنهما مترافقان

∴ الجذر الأخر هو ١ – ت

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{أ}{١} = أ$

∴ أ = (١ – ت) (١ + ت) = ١ + ١ = ٢

∴ أ = ٢

مثال ٥ : إذا كان (٢ + ت) أحد جذور المعادلة
س^{٢} – ٤ س + ب = ٠ أوجد الجذر الأخر وكذلك قيمة ب

الحل

إذا كان (٢ + ت) أحد جذور المعادلة فإن الجذر الأخر هو (٢ – ت) ⟸ ∴ الجذر الأخر هو (٢ – ت)

⊙ **حاصل ضرب الجذرين** = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{ب}{١} = ب$

∴ ب = (٢ + ت) (٢ - ت) = ٤ + ١ = ٥

∴ ب = ٥

مثال ٥ : أوجد قيمة أ التى تجعل :
(١) أحد جذرى المعادلة ٢ س^{٢} + (أ - ٣) س – ٥ = ٠ هو المعكوس الجمعى للأخر
(٢) أحد جذرى المعادلة ٢ أ س^{٢} + ٧ س + أ^{٢} + ١ = ٠ هو المعكوس الضربى للأخر
(٣) مجموع جذرى المعادلة (أ - ١) س^{٢} + (أ - ٣) س – ٤ = ٠ يساوى ٥

الحل

(١) فى المعادلة ٢ س^{٢} + (م – ٣) س – ٥ = ٠

أ = ٢ ب = م – ٣ هـ = - ٥

∵ أحد الجذرين معكوس جمعى للأخر نفرض أن أحد الجذرين ل يكون الأخر – ل

مجموعهما = ل + (- ل) = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{-(م-٣)}{٢} = ٠$

∴ م – ٣ = ٠ ⟸ م = ٣

(٢) ٢ م س^{٢} + ٧ س + م^{٢} + ١ = ٠

أ = ٢م ب = ٧ هـ = م^{٢} + ١

نفرض أن أحد الجذرين هو ل فيكون الأخر $\frac{١}{ل}$

حاصل ضربهما = ل × $\frac{١}{ل}$ = ١

$\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{م^{٢}+١}{٢م} = ١$

∴ $\frac{م^{٢}+١}{٢م} = ١$ ⟸ م^{٢} + ١ = ٢ م

⟸ م^{٢} - ٢ م + ١ = ٠

(م – ١) (م – ١) = ٠ ⟸ م = ١

(٣) متروك للطالب

مثال ٦ : أوجد قيمة م التى تجعل :
(١) مجموع جذرى المعادلة
س^{٢} – (م + ٤) س + ٣ م^{٢} = ٠
يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة
٢ س^{٢} + ٧ م س + م^{٢} = ٠
(٢) أحد جذرى المعادلة ٨ س^{٢} – ٣٠ س + م = ٠
يساوى مربع الجذر الأخر

الحل

س^{٢} – (م + ٤) س + ٣ م^{٢} = ٠

٢ س^{٢} + ٧ م س + م^{٢} = ٠

مجموع الجذرين = $\frac{م+٤}{١}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{م^{٢}}{٢}$

ولكن مجموع جذرى المعادلة الأولى = حاصل ضرب جذرى الثانية

∴ $\frac{م+٤}{١} = \frac{م^{٢}}{٢}$ ⟸ م^{٢} = ٢ م + ٨

⟸ م^{٢} – ٢م – ٨ = ٠

(م – ٤) (م + ٢) = ٠

⟸ م = ٤ أو - ٢

(٢) ٨ س^{٢} – ٣٠ س + م = ٠

بفرض أن أحد الجذرين = ل يكون الأخر ل^{٢}

مجموعهما = ل + ل^{٢} = $\frac{٣٠}{٨} = \frac{١٥}{٤}$

⟸ ٤ ل^{٢} + ٤ ل = ١٥

٤ ل^{٢} + ٤ ل – ١٥ = ٠ (٢ ل – ٣) (٢ ل + ٥) = ٠

∴ ل = $\frac{٣}{٢}$ ، ل = $\frac{-٥}{٢}$

حاصل ضربهما = $\frac{\text{م}}{٨} = \text{ل} \times \text{ل}^{٢} = \text{ل}^{٣}$

⇐ م = ٨ ل^{٣}

عندما ل = $\frac{٣}{٢}$

⇐ م = ٨ ل^{٣} = ٨ × $(\frac{٣}{٢})^{٣}$ = ٨ × $\frac{٢٧}{٨}$ = ٢٧

عندما ل = $\frac{-٥}{٢}$

⇐ م = ٨ ل^{٣} = ٨ × $(\frac{-٥}{٢})^{٣}$ = ٨ × $\frac{-١٢٥}{٨}$ = -١٢٥

مثال ٧ : أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠
(١) ضعف الجذر الأخر (٢) يزيد عن الأخر بمقدار ٣

الحل

(١) نفرض أن أحد الجذرين ل فيكون الأخر ٢ ل

حاصل جمعهما = ل + ٢ ل = ٣ ل = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

⇐ ل = $\frac{-\text{ب}}{٣\text{أ}}$ ——— (١)

حاصل ضربهما = ل × ٢ ل = ٢ ل^{٢} = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

⇐ ٢ ل^{٢} = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ——— (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ ل = $\frac{-\text{ب}}{٣\text{أ}}$ ، ٢ل^{٢} = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

⇐ ٢$(\frac{-\text{ب}}{٣\text{أ}})^{٢}$ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

٢ × $\frac{\text{ب}^{٢}}{٩\text{أ}^{٢}}$ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ⇐ $\frac{٢\text{ب}^{٢}}{٩\text{أ}}$ = $\frac{\text{جـ}}{١}$

⇐ ٢ ب^{٢} = ٩ أ جـ

(٢) نفرض أن أحد الجذرين ل فيكون الأخر ل – ٣

حاصل الجمع = ل + ل – ٣ = ٢ ل – ٣ = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

٢ ل = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ + ٣ ⇐ ل = $\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} + \frac{٣}{٢}$ ——— (١)

حاصل الضرب = ل(ل – ٣) = ل^{٢} – ٣ ل = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

ل^{٢} – ٣ ل = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ——— (٢)

بالتعويض من ١ فى ٢ نجد أن :

$(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} + \frac{٣}{٢})^{٢} - ٣(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} + \frac{٣}{٢}) = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

$\frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} + \frac{٩}{٤} - \frac{٣\text{ب}}{٢\text{أ}} + \frac{٣\text{ب}}{٢\text{أ}} - \frac{٩}{٢} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

$\frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} + \frac{٩ - ١٨}{٤} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

⇐ $\frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} + \frac{-٩}{٤} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ..... × ٤ أ^{٢}

ب^{٢} – ٩ أ^{٢} = ٤ أ جـ

⇐ ب^{٢} = ٩ أ^{٢} + ٤ أ جـ

مثال ٨ : أوجد قيمة ب التى تجعل مجموع الجذرين للمعادلة س^{٢} – (ب + ٢)س + ٥ ب^{٢} = ٠ يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة س^{٢} – ٣ ب س + ب^{٢} = ٠

الحل

مجموع جذرى المعادلة الأولى = ب + ٢

حاصل ضرب جذرى المعادلة الثانية = ب^{٢}

ب^{٢} = ب + ٢ ⇐ ب^{٢} – ب – ٢ = ٠

(ب – ٢) (ب + ١) = ٠ ⇐ ب = ٢ ، ب = -١

مثال ٩ : إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة : ٨ س^{٢} – ب س + ٣ = ٠ تساوى ٢ : ٣ أوجد قيمة ب

الحل

نفرض أن الجذرين ٢ل ، ٣ ل

مجموع الجذرين = ٢ ل + ٣ ل = ٥ ل = $\frac{\text{ب}}{٨}$

⇐ ل = $\frac{\text{ب}}{٤٠}$ ⇐ ب = ٤٠ ل —— (١)

حاصل الضرب = ٢ ل × ٣ ل = ٦ ل^{٢} = $\frac{٣}{٨}$

$\frac{٦\text{ل}^{٢}}{١} = \frac{٣}{٨}$ ⇐ ل^{٢} = $\frac{٦ \times ٨}{٣}$ = ١٦

⇐ ل = $\sqrt{١٦}$ = ±٤ —— (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

∵ ل = $\frac{\text{ب}}{٤٠}$ ⇐ ب = ٤٠ ل

عندما ل = ٤ ⇐ ب = ٤٠ × ٤ = ١٦٠

عندما ل = -٤ ⇐ ب = ٤٠ × -٤ = -١٦٠

تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

إذا كان ل ، م جذرا المعادلة أ س^{٢} + ب س + هـ = ٠ فإنه يمكن كتابتها على الصورة

(س – ل) (س – م) = ٠

⟸ س^{٢} – ل س – م س + ل م = ٠

س^{٢} – (ل + م) س + ل م = ٠

أى أن المعادلة التربيعية يمكن كتابتها على الصورة :

س^{٢} – (**مجموع الجذرين**) س + **حاصل ضرب الجذرين** = ٠

مثال ١ : كون المعادلة التى جذريها كلا من

(١) ٢ ، ٥ (٢) ٣ ، -٤

(٣) -٥ ، ٥ (٤) ٢-$\sqrt{٣}$ ، ٢ + $\sqrt{٣}$

الحل

(١) س^{٢} – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

⟸ س^{٢} - ٧ س + ١٠ = ٠

(٢) س^{٢} – (-٤ + ٣) س + (٣ × -٤) = ٠

⟸ س^{٢} + س – ١٢ = ٠

(٣) س^{٢} – (-٥ + ٥) س + (-٥ × ٥) = ٠

⟸ س^{٢} – ٠ س – ٢٥ = ٠ ⟸ س^{٢} – ٢٥ = ٠

(٤) **مجموع الجذرين** = ٢ - $\sqrt{٣}$ + ٢ + $\sqrt{٣}$ = ٤

حاصل ضربهما = (٢ - $\sqrt{٣}$)(٢ + $\sqrt{٣}$) = ٤ – ٣ = ١

س^{٢} – ٤ س + (٤ – ٣) = ٠

س^{٢} – ٤ س + ١ = ٠

مثال ٢ : إذا كان ل ، م جذرا المعادلة ٢ س^{٢} – ٣ س + ١ = ٠ أوجد القيمة العددية لكلا مما يأتى

(١) ل^{٢} م + م^{٢} ل (٢) ١/ل + ١/م

الحل

المعادلة المعطاه هى ٢ س^{٢} – ٣ س + ١ = ٠

حاصل جمع جذريها = ل + م = –معامل س / معامل س^{٢} = ٣/٢

حاص ضرب جذريها = ل م = الحد المطلق / معامل س^{٢} = ١/٢

(١) ل^{٢} م + م^{٢} ل = ل م (ل + م) = ١/٢ × ٣/٢ = ٣/٤

(٢) ١/ل + ١/م = (ل + م)/(ل م) = ٣/٢ ÷ ١/٢ = ٣/٢ × ٢/١ = ٣

ملاحظات مهمة

(١) ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٢ ل م

(٢) ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م) [(ل + م)^{٢} – ٣ ل م]

(٣) (ل - م) = $\sqrt{(ل + م)^{٢} – ٤ ل م}$

(٤) ل^{٢} – م^{٢} = (ل – م) (ل + م)

(٥) ل^{٣} – م^{٣} = (ل – م) [(ل + م)^{٢} – ل م]

(٦) ١/ل + ١/م = (ل + م)/(ل م)

(٧) م/ل + ل/م = (ل^{٢} + م^{٢})/(ل م) = ((ل + م)^{٢} – ٢ ل م)/(ل م)

مثال ٣ : إذا كان ل ، م جذرا المعادلة س^{٢} – ٥ س +٤ = ٠ أوجد القيمة العددية لكلا ما يأتى

(١) ل^{٢} + م^{٢} (٢) ل^{٣} + م^{٣} (٣) ل – م

(٤) ل^{٢} – م^{٢} (٥) ل^{٣} – م^{٣} (٦) ١/ل + ١/م

الحل

إذا كان جذرا المعادلة ⟸ س^{٢} – ٥ س +٤ = ٠ هما ل ، م فإن :

حاصل الجمع ل + م = –معامل س / معامل س^{٢} = –ب/أ = ٥/١ = ٥

حاصل الضرب ل م = الحد المطلق / معامل س^{٢} = جـ/أ = ٤/١ = ٤

(١) ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٢ م ل

= (٥)^{٢} – ٢×٤ = ٢٥ – ٨ = ١٧

(٢) ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م) [(ل + م)^{٢} – ٣ ل م]

= (٥) [(٥)^{٢} – ٣ × ٤] = ٥ × (٢٥ – ١٢)

= ٥ × ١٣ = ٦٥

(٣) ل - م = $\sqrt{(ل + م)^{٢} – ٤ ل م}$

= $\sqrt{٥^{٢} - ٤ × ٤}$ = $\sqrt{٢٥ – ١٦}$ = $\sqrt{٩}$ = ±٣

(٤) ل^{٢} – م^{٢} = (ل – م) (ل + م)

= ±٣ × ٥ = ±١٥

(٥) ل^{٣} – م^{٣} = (ل – م) [(ل + م)^{٢} – ل م]

= ±٣ × [٥^{٢} - ٣] = ٣ × (٢٥ – ٣)

= ±٣ × ٢٢ = ±٦٦

(٦) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م} = \frac{٥}{٣}$

مثال ٤ : إذا كان اللفرق بين جذرى المعادلة
٦ س^{٢} - ٧ س + ١ = هـ هو $\frac{١١}{٦}$ أوجد قيمة هـ

الحل

أولا المعادلة لا بد أن تكون صفرية
نفرض أن الجذرين هما ل ، م

$ل + م = \frac{٧}{٦}$ ، $ل م = \frac{١ - هـ}{٦}$

$(ل - م) = \sqrt{(ل + م)^{٢} - ٤ ل م}$

$= \sqrt{(\frac{٧}{٦})^{٢} - ٤ \times \frac{١ - هـ}{٦}}$

$= \sqrt{\frac{٤٩}{٣٦} - \frac{٤ - ٤هـ}{٦} \times \frac{٦}{٦}} = \sqrt{\frac{٤٩}{٣٦} - \frac{٢٤ - ٢٤هـ}{٣٦}}$

$= \sqrt{\frac{٤٩ - ٢٤ + ٢٤هـ}{٣٦}} = \sqrt{\frac{٢٥ + ٢٤هـ}{٣٦}}$

لكن $ل - م = \frac{١١}{٦}$

$\sqrt{\frac{٢٥ + ٢٤هـ}{٣٦}} = \frac{١١}{٦}$ وبتربيع الطرفين

$\frac{٢٥ + ٢٤هـ}{٣٦} = \frac{١٢١}{٣٦} \Longleftarrow ٢٥ + ٢٤هـ = ١٢١$

$٢٤هـ = ١٢١ - ٢٥ = ٩٦ \Longleftarrow هـ = \frac{٩٦}{٢٤} = ٤$

حل أخر

$ل + م = \frac{٧}{٦}$ —— (١) ، $ل م = \frac{١ - هـ}{٦}$ —— (٣)

$ل - م = \frac{١١}{٦}$ —— (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

$ل + م + ل - م = \frac{٧}{٦} + \frac{١١}{٦} = \frac{١٨}{٦} = ٣$

$٢ ل = ٣ \Longleftarrow ل = \frac{٣}{٢}$

بالتعويض فى (١)

$م = \frac{٧}{٦} - \frac{٣}{٢} = \frac{٧ - ٩}{٦} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣}$

بالتعويض عن قيمة ل ، م فى (٣)

$ل م = \frac{١ - هـ}{٦} \Longleftarrow \frac{٣}{٢} \times \frac{-١}{٣} = \frac{١ - هـ}{٦}$

$\frac{-٣}{٦} = \frac{١ - هـ}{٦} \Longleftarrow ١ - هـ = - ٣$

$\Longleftarrow - هـ = - ٣ - ١$ ، $هـ = ٤$

مثال ٥ : إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة
س^{٢} + هـ س + ٢هـ = ٠ يساوى ضعف حاصل جمع
جذرى المعادلة س^{٢} + أ س + هـ = ٠ أوجد قيمة هـ

الحل

بفرض أن جذرى المعادلة
س^{٢} + هـ س + ٢هـ = ٠ هما ل ، م
وبفرض أن جذرى المعادلة
س^{٢} + أ س + هـ = ٠ هما هـ ، و

بذلك يكون $(ل - م) = ٢$ هـ و

أولا ل - م من المعادلة س^{٢} + هـ س + ٢هـ = ٠

$ل + م = \frac{- معامل\ س}{معامل\ س^{٢}} = \frac{- ب}{أ} = - \frac{هـ}{١} = - هـ$

$ل م = \frac{الحد\ المطلق}{معامل\ س^{٢}} = \frac{هـ}{أ} = \frac{٢هـ}{١} = ٢ هـ$

$(ل - م) = \sqrt{(ل + م)^{٢} - ٤ ل م}$

$= \sqrt{(- هـ)^{٢} - ٤ \times ٢ هـ} = \sqrt{هـ^{٢} - ٨هـ}$

ثانيا ٢ هـ و من المعادلة س^{٢} + أ س + هـ = ٠

هـ و $= \frac{هـ}{١} =$ هـ —————— (٢)

ولكن $\Longleftarrow (ل - م) = ٢$ هـ و   وبتربيع الطرفين

$(ل - م)^{٢} = ($هـ و$)^{٢}$

$(هـ^{٢} - ٨هـ)^{٢} = ٤ \times (هـ)^{٢}$

$هـ^{٢} - ٨هـ = ٤هـ^{٢} \Longleftarrow ٤هـ^{٢} - هـ^{٢} + ٨هـ = ٠$

$٣هـ^{٢} + ٨هـ = ٠ \Longleftarrow هـ (٣هـ + ٨) = ٠$

هـ = ٠   ، $هـ = - \frac{٨}{٣}$

مثال ٦ : إذا علم أن جذرا المعادلة س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠
هما ل ، م أوجد المعادلة التى جذراها
(ل - ١)،(م-١)

الحل

فى تكوين المعادلة يلزم إيجاد جذور المعادلة المعطاه
ولكن فى معظم المعادلات تكون جذورها تخيلية لذا
يصعب التعامل معها بعد إيجادها لذا فإن الطريقة
التالية تكون حل أمثل لمعظم المسائل

المعادلة المعطاة :

$ل + م = \frac{- معامل\ س}{معامل\ س^{٢}} = \frac{٥}{١} = ٥$

$ل م = \frac{الحد المطلق}{معامل س^٢} = \frac{٦}{١} = ٦$

المعادلة المطلوبة :

حاصل الجمع

$= ل – ١ + م – ١ = ل + م – ٢ = ٥ – ٢ = ٣$

حاصل الضرب

$= (ل - ١)(م - ١) = ل م – ل – م + ١$

$= ل م – (ل + م) + ١ = ٦ – ٥ + ١ = ٢$

∴ تكون المعادلة $س^٢ – ٣ س + ٢ = ٠$

مثال ٧ : إذا كان ل ، م جذرا المعادلة $٢ س^٢ + ٣ س + ٥ = ٠$ **فأوجد المعادلة التى جذراها :** $ل^٢ + ٣ ، م^٢ + ٣$

الحل

المعادلة المعطاة : $٢ س^٢ + ٣ س + ٥ = ٠$

$ل + م = \frac{-٣}{٢}$ ، $ل م = \frac{٥}{٢}$

المعادلة المطلوبة :

حاصل الجمع

$= ل^٢ + ٣ + م^٢ + ٣ = ل^٢ + م^٢ + ٦$

$= (ل + م)^٢ – ٢ ل م + ٦$

$= (\frac{-٣}{٢})^٢ - ٢ × \frac{٥}{٢} + ٦$

$= \frac{٩}{٤} - ٥ + ٦ = \frac{٩}{٤} + ١ = \frac{١٣}{٤}$

حاصل الضرب :

$(ل^٢ + ٣)(م^٢ + ٣) = ل^٢ م^٢ + ٣ ل^٢ + ٣ م^٢ + ٩$

$= (ل م)^٢ + ٣ (ل^٢ + م^٢) + ٩ =$

$= (\frac{٥}{٢})^٢ + ٣ ((ل + م)^٢ - ٢ ل م) + ٩$

$= \frac{٢٥}{٤} + ٣ ((\frac{-٣}{٢})^٢ – ٢ × \frac{٥}{٢}) + ٩ =$

$= \frac{٢٥}{٤} + ٣ (\frac{٩}{٤} - ٥) + ٩ = \frac{٢٥}{٤} + ٣ (\frac{-١١}{٤}) + ٩$

$= \frac{٢٥}{٤} + \frac{-٣٣}{٤} + ٩ = \frac{٢٥ – ٣٣ + ٣٦}{٤} = \frac{٢٨}{٤} = ٧$

المعادلة $= س^٢ - \frac{١٣}{٤} س + ٧ = ٠$

أو تكون المعادلة $٤ س^٢ – ١٣ س + ٢٨ = ٠$

حل اخر

نفرض أن أحد جذري المعادلة المطلوبة هو س لذا فإن :

$ل^٢ + ٣ = س \Leftarrow ل^٢ = س – ٣ \Leftarrow ل = \sqrt{س – ٣}$

ل يحقق المعادلة المعطاة لأنه احد جذورها

$∴ ٢ س^٢ + ٣ س + ٥ = ٠$

$٢ (\sqrt{س – ٣})^٢ + ٣ (\sqrt{س – ٣}) + ٥ = ٠$

$٢ (س – ٣) + ٣ \sqrt{س – ٣} + ٥ = ٠$

$٢ س - ٦ + ٣ \sqrt{س – ٣} + ٥ = ٠$

$٢ س - ١ = ٣ \sqrt{س – ٣}$ بتربيع الطرفين

$(٢ س - ١)^٢ = (٣ \sqrt{س – ٣})^٢$

$٤ س^٢ + ١ – ٤ س = ٩ (س – ٣) = ٩ س – ٢٧$

$٤ س^٢ – ٤ س – ٩ س + ١ + ٢٧ = ٠$

$٤ س^٢ – ١٣ س + ٢٨ = ٠$

مثال ٨ : إذا كان ل ، م جذرى المعادلة $٢ س^٢ + ٣ س – ٧ = ٠$ **أوجد المعادلة التى جذريها** $(ل + ٢)^٢ ، (م + ٢)^٢$

الحل

المعادلة المعطاة : $٢ س^٢ + ٣ س - ٧ = ٠$

$ل + م = \frac{-٣}{٢}$ $ل م = \frac{-٧}{٢}$

المعادلة المطلوبة :

حاصل الجمع

$= (ل + ٢)^٢ + (م + ٢)^٢ =$

$= ل^٢ + ٤ ل + ٤ + م^٢ + ٤ م + ٤$

$= ل^٢ + م^٢ + ٤ (ل + م) + ٨$

$= (ل + م)^٢ – ٢ ل م + ٤ (ل + م) + ٨$

$= (\frac{-٣}{٢})^٢ – ٢ × \frac{-٧}{٢} + ٤ (\frac{-٣}{٢}) + ٨$

$= \frac{٩}{٤} + ٧ - ٦ + ٨ = \frac{٩}{٤} + ٩ = \frac{٤٥}{٤}$

حاصل الضرب :

$= (ل + ٢)^٢ × (م + ٢)^٢ =$

$[(ل + ٢)(م + ٢)]^٢ = [ل م + ٢ ل + ٢ م + ٤]^٢$

$= [ل م + ٢ (ل + م) + ٤]^٢$

$= (\frac{-٧}{٢} + ٢ × \frac{-٣}{٢} + ٤)^٢ = (\frac{-٧}{٢} - ٣ + ٤)^٢$

$= (\frac{-٧}{٢}+١)^{٢} = (-\frac{٥}{٢})^{٢} = \frac{٢٥}{٤}$

∴ المعادلة هى :

$س^{٢} - \frac{٤٥}{٤} س + \frac{٢٥}{٤} = ٠$ أو بالضرب × ٤

$٤س^{٢} - ٤٥ س + ٢٥ = ٠$

حل اخر

نفرض أن أحد جذري المعادلة المطلوبة هو س لذا فإن :

$(ل + ٢)^{٢} = س \Leftarrow ل + ٢ = \sqrt{س}$

$\Leftarrow ل = \sqrt{س} - ٢$

ولكن ل يحقق المعادلة المعطاه لأنه أحد جذورها :

∴ ل يحقق المعادلة $٢ س^{٢} + ٣ س - ٧ = ٠$

$٢ ل^{٢} + ٣ ل - ٧ = ٠$

$٢ (\sqrt{س} - ٢)^{٢} + ٣ (\sqrt{س} - ٢) - ٧ = ٠$

$٢ (س + ٤ - ٤\sqrt{س}) + ٣\sqrt{س} - ٦ - ٧ = ٠$

$٢ س + ٨ - ٨\sqrt{س} + ٣\sqrt{س} - ٦ - ٧ = ٠$

$٢ س - ٥ = ٥\sqrt{س}$ بتربيع الطرفين

$(٢ س - ٥)^{٢} = (٥\sqrt{س})^{٢}$

$٤ س^{٢} + ٢٥ - ٢٠ س = ٢٥ س$

$٤ س^{٢} - ٤٥ س + ٢٥ = ٠$

مثال ٩: إذا كان $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة

$٦ س^{٢} - ٥ س + ١ = ٠$

أوجد المعادلة التى جذريها ل − ٢ ، م − ٢

الحل

المعادلة المعطاة

: $٦ س^{٢} - ٥ س + ١ = ٠$

مجموع الجذرين= $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل+م}{ل م} = \frac{٥}{٦}$ ——— (١)

ضرب الجذرين = $\frac{١}{ل} \times \frac{١}{م} = \frac{١}{ل م} = \frac{١}{٦}$ ——— (٢)

من المعادلة ٢

∵ البسط يساوى البسط ∴ ل م = ٦ —— (٣)

بالتعويض من (٣) فى (١) نجد أن

$\frac{ل+م}{٦} = \frac{٥}{٦} \Leftarrow ل + م = ٥$ —— (٢)

المعادلة المطلوبة :

حاصل جمع الجذرين = $ل - ٢ + م - ٢ = ل + م - ٤$

$= ٥ - ٤ = ١$

حاصل ضرب الجذرين= $(ل - ٢)(م - ٢)$

$= ل م - ٢ل - ٢م + ٤$

$= ل م - ٢ (ل + م) + ٤$

$= ٦ - ٢ \times ٥ + ٤$

$= ٦ - ١٠ + ٤ =$ صفر

لذافإن المعادلة هى :

$س^{٢} - س = ٠$

تدريب ١ :

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة

$س^{٢} - ٣ س - ٣ = ٠$ أوجد القيمة العددية لكلا مما يأتى

(١) $ل^{٢} + م^{٢}$ (٢) $ل^{٣} + م^{٣}$ (٣) $ل - م$

(٤) $ل^{٢} - م^{٢}$ (٥) $ل^{٣} - م^{٣}$ (٦) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}$

(٧) $\frac{م}{ل} + \frac{ل}{م}$

تدريب ٢ :

إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة

$٢س^{٢} - ٥ س + ١٢ = ٠$ أوجد المعادلة التى جذريها

(١) $ل^{٢} + م^{٢}$ (٢) $ل^{٣} + م^{٣}$ (٣) $ل - م$

(٤) $ل^{٢} - م^{٢}$ (٥) $ل^{٣} - م^{٣}$ (٦) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}$

(٧) $\frac{م}{ل} + \frac{ل}{م}$

تدريب ٣ :

إذا كان ل ، م جذرا المعادلة

$٢ س^{٢} - ٣ س - ١ = ٠$

فأوجد القيمة العددية لكل مما يأتى :

- $ل^{٢} + م^{٢}$
- $ل^{٢} م^{٢}$
- $ل - م$
- $ل^{٣} + م^{٣}$

بحث إشارة الدالة

المفهوم

يقصد ببحث إشارة المقدار الجبرى هو إيجاد قيم س الحقيقية التى تكون فيها إشارة المقدار موجبة أو سالبة أو ينعدم فيها المقدار

إشارة الدالة الثابتة

الصورة العامة للدالة الثابتة

د(س) = ك ∀ س ∈ ح*

القاعدة

(إشارة الدالة الثابتة)

إشارة د(س) = ك هى نفس إشارة ك ∀ ك ∈ ح*

مثال ١ : إبحث إشارة كل من الدوال الأتية :

(١) د(س) = - ٣ (٢) د(س) = ٤ (٣) د(س) = ٠

الحل

(١) د(س) = - ٣ د(س) < ٠ ∀ س ∈ ح

(٢) د(س) = ٤ د(س) > ٠ ∀ س ∈ ح

(٣) د(س) = ٠ د(س) = ٠ ∀ س ∈ ح

إشارة الدالة الخطية

الصورة العامة للدالة الخطية

د(س) = م س + ب ∀ م ≠ ٠

القاعدة :

نوجد أصفار الدالة وهى س = $\frac{-ب}{م}$ وتكون إشارة

د(س) مثل إشارة م عندما س > $\frac{-ب}{م}$

د(س) عكس إشارة م عندما س < $\frac{-ب}{م}$

د(س) = ٠ عندما س = $\frac{-ب}{م}$

وللتوضيح على خط الأعداد لاحظ

د(س) | مثل إشارة م | صفر | عكس إشارة م | س | $\frac{-ب}{م}$

مثال ٢ : بين إشارة الدالة د(س) = س – ٢ مع توضيح ذلك بيانيا

الحل

أولا نوجد أصفار الدالة وذلك بمساواتها للصفر

س – ٢ = ٠ ⟸ س = ٢ أصفار الدالة = { ٢ }

بحث إشارة

- د(س) > ٠ ∀ س > ٢
- د(س) < ٠ ∀ س < ٢
- د(س) = ٠ ∀ س = ٢

د(س) | مثل إشارة م + + + + + + | صفر | عكس إشارة م - - - - - - - - | س | ٢

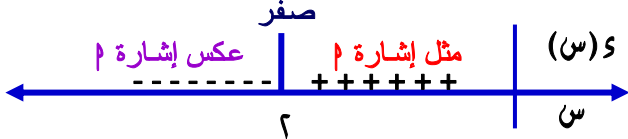
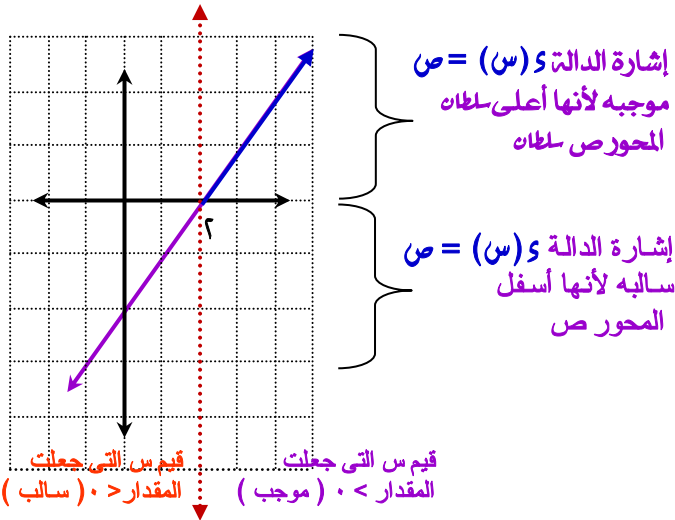
لاحظ الرسم البيانى التالى :

إشارة الدالة د(س) = ص موجبه لأنها أعلى محور س

إشارة الدالة د(س) = ص سالبه لأنها أسفل المحور ص

قيم س التى جعلت المقدار > ٠ (موجب)

قيم س التى جعلت المقدار < ٠ (سالب)

٢

مثال ٣ : عين إشارة الدالة الخطية د(س) = - ٢ س – ٤ مع توضيح ذلك بيانيا

الحل

أولا : أصفار الدالة وذلك بوضع د(س) = ٠

- ٢ س – ٤ = ٠ ⟸ س = - $\frac{٤}{٢}$ = - ٢

ثانيا بحث الإشارة :

د(س) | - - - - - - - - - | صفر | + + + + + + + + | س | -٢

- د(س) > ٠ ∀ س < - ٢
- د(س) < ٠ ∀ س > - ٢
- د(س) = ٠ ∀ س = {- ٢}

تحقق بنفسك بيانيا

مثال ٣ : عين إشارة الدالة د (س) = ٢ س

الحل

أولا : أصفار الدالة

وذلك بوضع د (س) = ٠

٢ س = ٠ ⟸ س = ٠

ثانيا بحث الإشارة :

د (س) صفر ++++++++ -------- ٠ س

- د (س) > ٠ ∀ س > ٠
- د (س) < ٠ ∀ س < ٠
- د (س) = ٠ ∀ س = {٠}

تحقق بنفسك بيانيا

مثال ٤ : عين إشارة الدالة

د (س) = { س - ٢ ∀ س ≥ ٢ ؛ - س + ٢ ∀ س < ٢ }

الحل

الدالة معرفة بقاعدتين

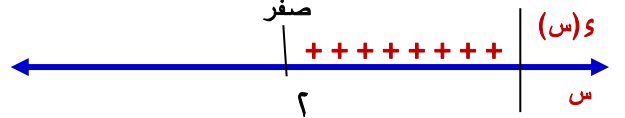
القاعدة الأولى د (س) = س − ٢ ∀ س ≥ ٢

شرطها هو س ≥ ٢

نبحث إشارة القاعدة الأولى ونطبق الشرط عليها

اولا اصفار القاعدة الأولى :

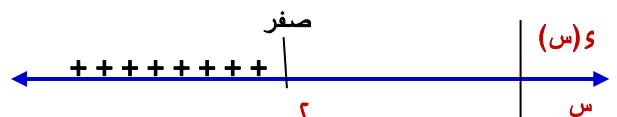
س - ٢ = ٠ ⟸ س = ٢

د (س) صفر +++++++++ ٢ س

ثانيا بحث إشارة القاعدة الأولى

- د (س) > ٠ ∀ س > ٢ وشرطها س ≥ ٢
- د (س) < ٠ ∀ س < ٢ مرفوضة لأنها تخالف الشرط
- د (س) = ٠ ∀ س = { ٠ } وشرطها س = ٢

ثالثا اصفار القاعدة الثانية

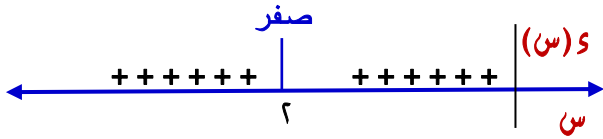
- س + ٢ = ٠ ⟸ - س = - ٢ ، س = ٢

د (س) صفر +++++++++ ٢ س

رابعا بحث إشارة القاعدة الثانية

- د (س) > ٠ ∀ س < ٢ وشرطها س < ٢
- د (س) < ٠ ∀ س > ٢ مرفوضة لأنها تخالف الشرط
- د (س) = ٠ ∀ س = { ٠ } مرفوضة لأنها تخالف الشرط

وبتجميع إشارة القاعدتين نجد أن :

د (س) صفر ++++++ ++++++ ٢ س

- د (س) > ٠ ∀ س ∈ ح − {٢}
- د (س) = ٠ ∀ س = { ٢ }

تدريب

أبحث إشارة كلا من الدوال الأتية

(١) د (س) = ٢ (٢) د (س) = - ٤

(٣) د (س) = صفر (٤) د (س) ٣ س − ٦

(٥) د (س) = - ٢ س (٦) د (س) = ٢ س + ٣

إشارة الدالة التربيعية

الصورة العامة للدالة التربيعية هى

أ س^2 + ب س + هـ = ٠ ∀ أ ، ب ≠ صفر

هذه المعادلة لها جذرن دائما ولكن عندما نتكلم فى مجموعة الأعداد الحقيقية فإن جذريها يمكن التعرف عيهما ونوعهما بإستخدام المميز = ب^2 − ٤ أ هـ

فإذا كان :

(١) المميز > ٠ (موجب) يكون للمعادلة حل ويكون لها جذران حقيقيان مختلفان هما

مثلا ل ، م

(٢) المميز = ٠ يكون للمعادلة جذر واحد مكرر

(٣) المميز < ٠ لا يكون للمعادلة حل فى مجموعة الأعداد الحقيقية ويكون للمعادلة جذران تخيليان

أولا إذا كان المميز موجب :

كما ذكرنا فإن المعادلة يكون لها حلان فى ح
ونفرض أنهما { ل ، م }
فيكون بحث الإشارة كالتالى :

- د(س) = ٠ ∀ س = { ل ، م }
- د(س) مثل إشارة م (معامل س٢) ∀ س ∈ ح – [ل ، م]
- د(س) عكس إشارة م (معامل س٢) ∀ س ∈] ل ، م [

وعلى خط الأعداد يكون كالتالى :

د(س) | مثل إشارة م | صفر | عكس إشارة م | صفر | مثل إشارة م
س — ل — م

مثال ١ عين إشارة الدالة د(س) = - س٢ + ٤ س + ٥

الحل

د(س) = ٠ ∴ ⟸ - س٢ + ٤ س + ٥ = ٠ × -١
س٢ – ٤ س – ٥ = ٠ ⟸ (س -٥) (س + ١) = ٠
س = ٥ أ، - ١

د(س) | ---- | صفر | +++++++++ | صفر | ------
س — ٥ — -١

د(س) > ٠ ∀ س ∈] -١ ، ٥ [
د(س) < ٠ ∀ س ∈ ح – [-١ ، ٥]
د(س) = ٠ ∀ س ∈ { - ١ ، ٥ }

قيم س التى جعلت المقدار < ٠ — قيم س التى جعلت المقدار > ٠ — قيم س التى جعلت المقدار < ٠

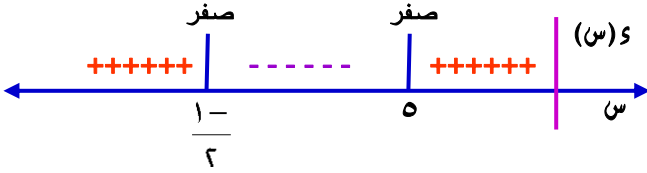
مثال ٢ : عين إشارة المقدار الجبرى

(١) د (س) = ٢ س٢ – ٩ س - ٥

الحل

د(س) = ٠ ⟸ ٢ س٢ – ٣ س -٥ = ٠
(٢ س +١) (س -٥) = ٠ ⟸ س = $\frac{-1}{2}$ ، س = ٥

د(س) | ++++++ | صفر | ------ | صفر | ++++++
س — ٥ — $\frac{-1}{2}$

د(س) > ٠ ∀ س ∈ ح – [$\frac{-1}{2}$ ، ٥]
د(س) < ٠ ∀ س ∈] $\frac{-1}{2}$ ، ٥ [
د(س) = ٠ ∀ س ∈ { $\frac{-1}{2}$ ، ٥ }

ثانيا إذا كان المميز صفرا

يكون للمعادلة حل وحيد أى يكون لها جذران واكن متساويان فيكون جذر مكرر ولنفرض أنه = { ل }
فيكون بحث الإشارة كالتالى :

- د(س) = ٠ ∀ س = { ل }
- د(س) مثل إشارة م (معامل س٢) ∀ س ∈ ح – { ل }

وعلى خط الأعداد يكون كالتالى :

د(س) | مثل إشارة م (معامل س٢) | صفر | مثل إشارة م (معامل س٢)
س — ل

مثال ٣ : د(س) = س٢ – ٦ س + ٩

الحل

د(س) = ٠ ⟸ س٢ – ٦ س + ٩ = ٠
(س – ٣)٢ = ٠ ⟸ س – ٣ = ٠ ⟸ س = ٣

د(س) | ++++++++++++ | صفر | ++++++++++++
س — ٣

د(س) > ٠ ∀ س ∈ ح – {٣}
د(س) = ٠ ∀ س = { ٣ }

قيم س التى جعلت المقدار > ٠

قيم س التى جعلت المقدار > ٠

٣/٢

مثال ٤ : ابحث إشارة الدالة

د(س) = - ٤ س^{٢} + ١٢ س – ٩

الحل

د(س) = ٠ ⟸ - ٤ س^{٢} + ١٢ س – ٩ = ٠

٤ س^{٢} - ١٢ س + ٩ = ٠ ⟸ (٢ س – ٣)^{٢} = ٠

حيث أن المقدار مربع كامل ⟸ ٢ س – ٣ = ٠

المعادلة لها جذر مكرر وهو س = $\frac{٣}{٢}$

د(س) | - - - - - - - - صفر - - - - - - - -
س | $\frac{٣}{٢}$

د(س) < ٠ ∀ س ∈ ح – { $\frac{٣}{٢}$ }

د(س) = ٠ ∀ س = { $\frac{٣}{٢}$ }

ثالثا إذا كان المميز سالب

لا يكون للمعادلة حل فى ح ويكون جذريها تخيليان فيكون بحث الإشارة كالتالى :

د(س) مثل إشارة أ (معامل س^{٢}) ∀ س ∈ ح

وعلى خط الأعداد يكون كالتالى :

د(س) | مثل إشارة أ (معامل س^{٢})
س |

مثال ٥ : ابحث إشارة الدالة

د(س) = س^{٢} – ٥ س + ٢٥

الحل

د(س) =٠ ⟸ س^{٢} – ٥ س + ٢٥ = ٠

هذه المعادلة ليس لها حل فى ح وللتأكد من ذلك نوجد المميز

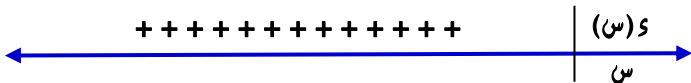
حيث أ = ١ ، ب = -٥ ، هـ = ٢٥

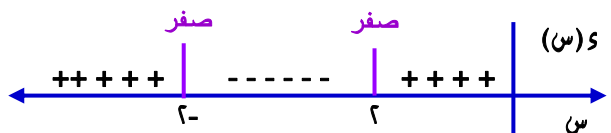
المميز = ب^{٢} – ٤ أ هـ

= ٢٥ – ٤ × ١ × ٢٥ = ٢٥ – ١٠٠ = - ٧٥

المميز عدد سالب لذا فإن المعادلة ليس لها حل فى ح فيكون بحث إشارة كالتالى :

د(س) > ٠ ∀ س ∈ ح

د(س) | + + + + + + + + + + + + +
س |

مثال ٦ : إذا كانت د(س) = س^{٢} – ٤ ، ن(س) = - س^{٢} + ٢ س + ٣ أوجد فترة الأعداد التى تكون فيها الدالتين د ، ن موجبتين معا أو سالبتين معا أو مختلفتين

الحل

أولا : د(س) = س^{٢} – ٤

س^{٢} – ٤ = ٠ ⟸ (س – ٢) (س + ٢) = ٠

جذرا المعادلة هما { ٢ ، -٢ }

فتكون إشارة الدالة كالتالى :

د(س) | + + + + صفر - - - - - - صفر + + + + +
س | ٢ -٢

ثانيا : ن(س) = - س^{٢} + ٢ س + ٣

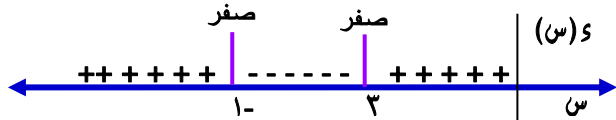
- س^{٢} + ٢ س + ٣ = ٠ × - ١

⟸ س^{٢} - ٢ س - ٣ =٠

(س – ٣) (س + ١) = ٠

جذرا المعادلة هما { ٣ ، - ١ }

فتكون إشارة الدالة كالتالى :

د(س) | + + + + + صفر - - - - - - صفر + + + + + +
س | ٣ -١

وبدمج خطى الأعداد للدالتين نجد أن :

د(س) + + + + ٣ + + + | - - - - ١- - - - - - - | + + + +

ن(س) - - - - | + + + + ٢ + + + | - - - - - - - ٢- - - - - - -

وبذلك يكون :

- سالبتين معا فى الفترة] – ٢ ، - ١ [
- موجبتين معا فى الفترة] ٢ ، ٣ [
- مختلفتين معا فى

[– ∞ ، - ٢] ∪] - ١ ، ٢ [∪] ٣ ، ∞ [

تدريب ١ :

أبحث إشارة كلا من الدوال الممثلة على الشبكة التربيعية فى كلا من الحالات الأتية

(١) (٢)

(٣) (٤)

(٥) (٦)

تدريب ١

أبحث إشارة كلا من الدوال الأتية :

(١) د (س) = س^٢ + ٤ س + ٥

(٢) د(س) = ٢ س + ٤

(٣) د(س) = - س^٢ + ٧ س – ١٢

(٤) د(س) = س^٢ – ٩

(٥) د(س) = س^٢ – س + ١

(٦) د(س) = - س^٢ – ٩

تدريب ٢ :

أوجد الفترات التى يكون فيها الدالتين

د(س) = س^٢ – ٥ س + ٦ ، ر(س) = س^٢ – ٩

موجبتين معا أو سالبتين معا أو مختلفتين

طرق قياس الزاوية

قد علمنا سابقا أن الزاوية هى مجرد إتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية تسمى هذه النقطة رأس الزاوية ويسمى الشعاعان بضلعى الزاوية

ففى الشكل المقابل :

- أ ب ∪ أ حـ شعاعان يمثلان ضلعا الزاوية
- النقطة أ تمثل رأس الزاوية
- أ ب ∪ أ حـ = (ب أ حـ)

ويمكن التعبير بها كالتالى ∠ ب أ حـ

ضلعى الزاوية

رأس الزاوية

الزاوية الموجهة :-

من التعريف السابق للزاوية نجد أن الزاوية السابقة يمكن قراءتها كالتالى : ∠ ب أ حـ أو ∠ حـ أ ب

ولكن إذا عمدنا ترتيب الضلعين أحدهما نهائى والاخر إبتدائى فإن المفهوم السابق للزاوية يتغير ويصبح الزاوية الموجهة لذا فإنه فى حالة الزاوية الموجهة تكون الزاوية عبارة عن زوج مرتب من الاشعة مسقطه الاول هو الضلع الابتدائى والمسقط الثانى هو الضلع النهائى

تعريف الزاوية الموجهة :

هى زوج مرتب من شعاعين (هما ضلعا الزاوية) لهما نفس نقطة البداية تسمى رأس الزاوية

فى الشكل المقابل :

(١) إذا اعتبرنا ان الضلع الابتدائى هو و أ والضلع النهائى هو و ب فإن الزوج المرتب (و ب ، و أ) يعبر عن الزاوية الموجهة ∠ أ و ب

ضلع نهائى

ضلع إبتدائى

(٢) إذا اعتبرنا ان الضلع الابتدائى هو و ب والضلع النهائى هو و أ فإن : الزوج المرتب (و ب ، و أ) يعبر عن الزاوية الموجهة ∠ ب و أ

ضلع إبتدائى

ضلع نهائى

ملحوظة مهمة :

- الزاوية الموجهة (أ و ب) ≠ الزاوية الموجهة (ب و أ)
- فى الزاوية الموجهة يرسم سهم خارج من الضلع الابتدائى الى النهائى

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

(١) قياس الزاوية الموجهة يكون موجب إذا كان الإتجاه من الضلع الابتدائى الى النهائى فى عكس حركة عقارب الساعة

ضلع نهائى

ضلع إبتدائى

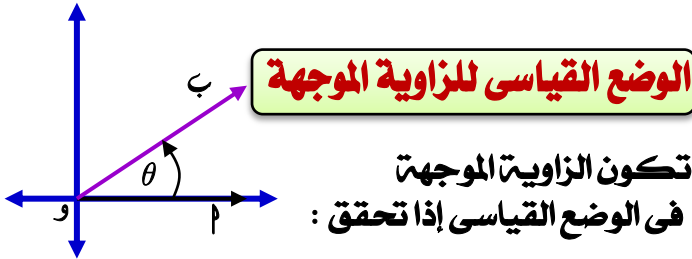
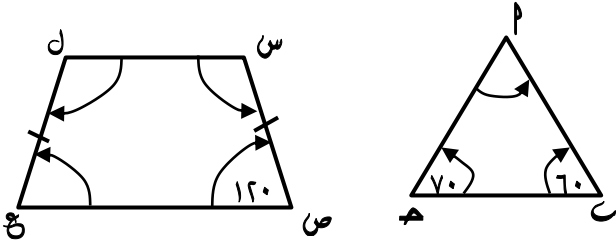
(٢) قياس الزاوية الموجهة يكون سالب إذا كان الإتجاه من الضلع الابتدائى الى النهائى فى نفس حركة عقارب الساعة

ضلع إبتدائى

ضلع نهائى

تدريب : اوجد قياس كلا من الزوايا الاتية

٧٠ ، ٦٠ ، ١٢٠

الوضع القياسى للزاوية الموجهة

تكون الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى إذا تحقق :

- رأس الزاوية منطبق على نقطة الاصل
- الضلع الابتدائى للزاوية ينطبق على محور السينات الموجب

θ

مثال : أوجد قياس كلا من الزوايا الموجهة الاتية :

٦٠ ، ٣٠ ، ١٢٠

الحل

(١) ق (أ و ب) الموجهة القياسية = ٦٠°

(٢) ق (أ و ب) الموجهة القياسية = - ٣٠°

(٣) ق (أ و ب) الموجهة القياسية = + ١٢٠°

قياس الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى

الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى
لها قياسان إحداهما موجب
والاخر سالب وذلك كالتالى:

فى الشكل المقابل :

الزاوية أ و ب التى صنعها الضلع
النهائى و ب مع الضلع الابتدائى و أ
فإذا كانت θ = ٦٠ على سبيل المثال فإن الضلع النهائى
يكون مساره كالتالى :

المسار الاول هو انه دار فى عكس حركة عقارب
الساعة وذلك ما يبينه السهم الاول
وفى تلك الحالة ⟸ ق (أ و ب) = + ٦٠

المسار الثانى انه دار فى نفس حركة عقارب الساعة
وذلك ما يبينه السهم الثانى
وفى تلك الحالة ⟸ ق (أ و ب) = - ٣٠٠

ونلاحظ أن مجموع مقياسى القياسين الموجب والسالب
= ٣٦٠

ملاحظات مهمة :

(١) ق (أ و ب) الموجهة = - ق (ب و أ) الموجهة
فمثلا إذا كان: ق (أ و ب) الموجهة = ٧٠
⟸ ق (ب و أ) الموجهة = - ٧٠

(٢) لكل زاوية موجهة فى الوضع القياسى قياسان
إحداهما موجب والاخر سالب

(٣) القياس الموجب للزاوية السالبة س = س + ٣٦٠

(٤) القياس السالب للزاوية الموجبة س = س − ٣٦٠

مثال ٣ : اوجد القياس الموجب لكلا من الزوايا الاتية
(١) θ = - ٦٠ (٢) θ = - ١٦٠° (٣) θ = - ٣٠٠°

الحل

(١) القياس الموجب للزاوية - ٦٠ = - ٦٠ + ٣٦٠ = ٣٠٠°
(٢) القياس الموجب للزاوية - ١٦٠ = - ١٦٠ + ٣٦٠ = ٢٠٠°
(٣) القياس الموجب للزاوية − ٣٠٠ = - ٣٠٠ + ٣٦٠ = ٦٠°

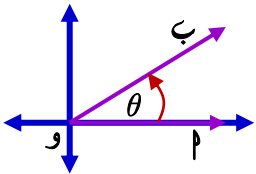
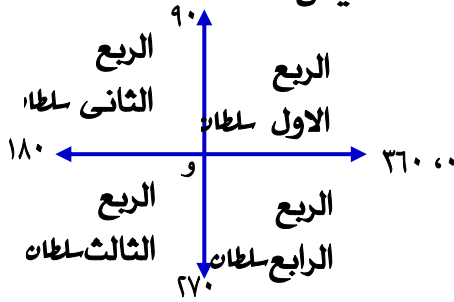
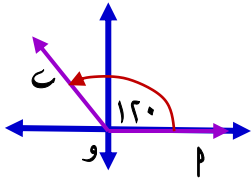
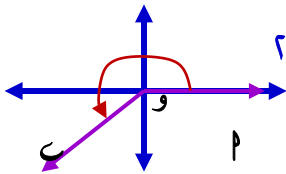
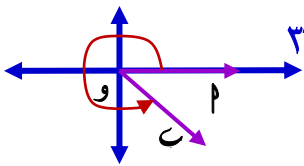
مثال ٤ : أوجد القياس السالب لكل من الزوايا الاتية
(١) ١٢٠° (٢) ٨٠° (٣) ٢٤٠°

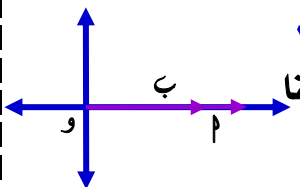
الحل

(١) القياس السالب للزاوية ١٢٠° = ١٢٠ - ٣٦٠ = - ٢٤٠°
(٢) القياس السالب للزاوية ٨٠ = ٨٠ − ٣٦٠ = - ٢٨٠°
(٣) القياس السالب للزاوية ٢٤٠ = ٢٤٠ − ٣٦٠ = - ١٢٠°

موقع الزاوية فى المستوى الاحداثى المتعامد

المستوى الاحداثى المتعامد كما بالشكل ينقسم الى اربعة
ارباع لاحظ ما ياتى

الربع الاول - الربع الثانى - الربع الثالث - الربع الرابع (٠ ، ٣٦٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠)

(١) إذا كان: ٠ < θ < ٩٠
فإن الزاوية θ تقع فى
الربع الاول

(٢) إذا كان: ٩٠ < θ < ١٨٠
فإن الزاوية θ تقع فى
الربع الثانى

(٣) إذا كان: ١٨٠ < θ < ٢٧٠
فإن الزاوية θ تقع فى
الربع الثالث

(٤) إذا كان: ٢٧٠ < θ < ٣٦٠
فإن الزاوية θ تقع فى
الربع الرابع

وفى حالة ان وقع الضلع النهائى على محور من المحاور مثل
س أو ص الموجب او السالب تسمى الزاوية فى تلك الحالة
بالزاوية المحورية او الزاوية الربعية كالتالى :

(١) إذا كانت θ = صفر أو ٣٦٠
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا
على المحور س الموجب

(٢) إذا كانت θ = ٩٠
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا
على المحور ص الموجب

(٣) إذا كانت θ = ١٨٠
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا
على محور س السالب

(٤) إذا كانت θ = ٢٧٠
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا
على محور ص السالب

الزوايا المتكافئة

تأمل الاشكال الاتية بدقة ولاحظ :

(١) (٢) (٣) (٤) (٥)

(١) الضلع النهائى سار فى عكس عقارب الساعة بزاوية θ فقط لذا فإن الانفراج الحادث بين الضلع الابتدائى والنهائى هو θ

(٢) الضلع النهائى سار فى عكس عقارب الساعة بزاوية θ + دورة كاملة اى ان قياس الزاوية = θ +٣٦٠ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو = θ

(٣) الضلع النهائى سار فى عكس عقارب الساعة بزاوية θ + دورتين كاملتين اى ان قياس الزاوية = θ + ٢×٣٦٠ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو = θ

(٤) الضلع النهائى سار فى نفس حركة عقارب الساعة بزاوية دورة كاملة − θ اى ان قياس الزاوية = ٣٦٠ − θ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو = θ

(٥) الضلع النهائى سار فى نفس حركة عقارب الساعة بزاوية دورتين كاملتين − θ اى ان قياس الزاوية = ٢× ٣٦٠ − θ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو= θ

فى كل الاشكال السابقة نجد أن الانفراج الحادث بين الضلع الابتدائى والنهائى ثابت فى كل مرة وهو = θ لذا فإن جميع الزوايا السابقة يقال عنها انها متكافئة

الزوايا المتكافئة :

هى تلك الزوايا التى لها نفس الضلع النهائى عندما تكون فى الوضع القياسى

ونستنتج مما سبق أن :

θ = θ ± ٣٦٠ = θ ± ٢×٣٦٠ = θ ± ٣ ×٣٦٠

ملاحظات مهمة :

(١) إذا كانت θ قياس زاوية فإن جميع الزوايا التى قياسها { θ + ن × ٣٦٠ } تكون متكافئة حيث ن ∈ ص

(٢) يمكن جمع (إضافة) أو طرح أى عدد من الدورات الكاملة للزاوية وذلك لن يؤثر فى موضع الضلع النهائى فى المستوى الاحداثى المتعامد فى الوضع القياسى للزاوية أى أنه يمكن اضافة أى عدد من الـ ٣٦٠ للزاوية أو طرحها منها ولن يؤثر ذلك على الزاوية

(٣) لمعرفة موقع الزاوية فى المستوى الاحداثى المتعامد يجب ان تنحصر بين [٠ ، ٣٦٠ [فإذا زادت الزاوية عن ٣٦٠ يجب طرح دورة او دورتين او ثلاث دورات او اكثر

(٤) عندما تكون الزاوية سالبة نضيف عدد أكبر منها وعندما تكون الزاوية موجبة نطرح منها عدد اصغر منها ولاحظ ان :

دورة واحدة = ٣٦٠
دورتين = ٢ × ٣٦٠ = ٧٢٠
ثلاث دورات = ٣×٣٦٠ = ١٠٨٠
اربعة دورات = ٤×٣٦٠ = ١٤٤٠
خمسة دورات = ٥ × ٣٦٠ = ١٨٠٠

مثال ١ : عين الربع الذى تقع فيه كلا من الزوايا الاتية

(١) ٥٣٠ (٢) ١٦٧٠ (٣) -٧٤٠
(٤) – ٢٥٣٠ (٥) ٣٤٥

الحل

(١) ٥٣٠ الزاوية موجبة واكبر من ٣٦٠ لذا يجب طرح منها عدد أصغر منها وهو دورة واحدة ٣٦٠
٥٣٠ – ٣٦٠ = ١٧٠ ∴ الزاوية فى الربع الثانى

(٢) ١٦٧٠ الزاوية موجبة واكبر من ٣٦٠ لذا يجب طرح عدد من الدورات الكاملة اصغر منها وهو اربعة دورات وهى ١٤٤٠
∴ θ = ١٦٧٠ – ١٤٤٠ = ٢٣٠ ∴ الزاوية فى الربع الثالث

(٣) – ٧٤٠ الزاوية سالبة واصغر من الصفر لذا يجب إضافة عدد من الدورات الكاملة مجموعها اكبر من الزاوية وهى ٣ دورات = ١٠٨٠
θ = -٧٤٠ + ١٠٨٠ = ٣٤٠ ∴ الزاوية فى الربع الرابع

(٤) – ٢٥٣٠ زاوية سالبة يجب إضافة عدد من الدورات الكاملة مجموعها أكبر من الزاوية وهى ١٠ دورات كاملة وهى = ٣٦٠٠
θ = -٢٥٣٠ + ٣٦٠٠ = ٧٠ ∴ الزاوية فى الربع الاول

(٥) ٣٤٥ زاوية موجبة تنحصر بين [٠ ، ٣٦٠] لذا لن يتم اضافة اى عدد من الدورات الكاملة او الطرح منها
θ = ٣٤٥ زاوية تقع فى الربع الرابع

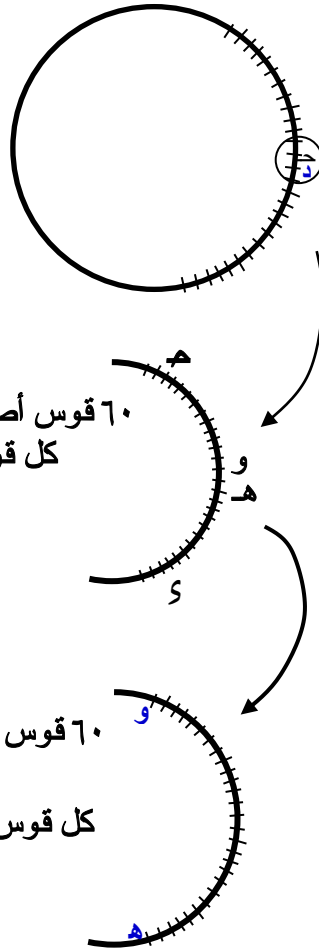
تدريب : حدد الربع الذى تقع فيه الزوايا الاتية

(١) صفر (٢) ٣٦٠ (٣) ١٥٠٠
(٤) – ١٣٣٦ (٥) -٢٣٨٥ (٦) ١٨٩٠
(٧) -١٧١٠ (٨) ٧٥٥

وحدات قياس الزاوية

القياس الستينى للزاوية

قام علماء الرياضيات بتقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوس متساوية كل قوس من هذة الأقواس يسمى الدرجة ويرمز له بالرمز ° ثم قاموا بتقسيم كل قوس من ال ٣٦٠ قوس إلى ٦٠ قوس أصغر كل قوس يسمى دقيقة ويرمز لها بالرمز ′ ثم تم تقسيم هذة الأقواس إلى ٦٠ قوس أصغر تمثل الثوان ويرمز لها بـ ″

كل قوس = ١°
مجموعهم = ٣٦٠ قوس
= ٣٦٠°

٦٠ قوس أصغر داخل هـ ء
كل قوس = ١′ دقيقة

٦٠ قوس اصغر داخل هـ و
كل قوس = ١″ ثانية

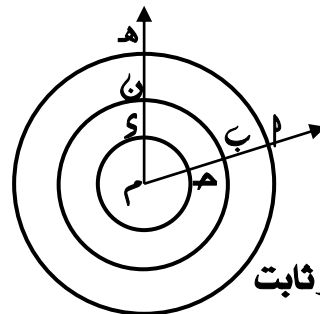
لذا فالقياس الستينى للزاوية يشبه أو يماثل القياس الزمن للوقت
فالقياس الستينى مكون من درجات وكل درجة بها ٦٠ دقيقة وكل دقيقة بها ٦٠ ثانية
وكذلك الوقت فالساعة تناظر الدرجات حيث بها ٦٠ دقيقة والدقيقة بها ٦٠ ثانية
ويجب ملاحظة أن :

- ١° = ٦٠′
- ١′ = ٦٠″
- ١° = ٣٦٠٠″

القياس الدائرى للزاوية

يعتمد هذا القياس على طول القوس من الدائرة التى تحصرة الزاوية المركزية المراد قياسها وكذلك طول نصف القطر للدائرة

حقيقة هند سية :

فى الدوائر المتحدة المركز إذا رسمت زاوية مركزية فإن النسبة بين طول القوس المقابل لهذه الزاوية المركزية إلى طول نصف قطر الدائرة المناظرة له يساوى مقدار ثابت لجميع الدوائر المتحدة المركز كالتالى :

أى أن :

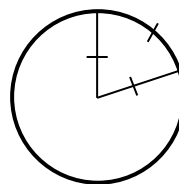
$$\frac{أ هـ}{م أ} = \frac{ب ن}{م ب} = \frac{هـ ء}{م هـ} = \text{مقدار ثابت}$$

هذا المقدار الثابت هو القياس الدائرى للزاوية المركزية م أى ان القياس الدائرى للزاوية المركزية يعتمد على طول القوس المقابل لها وكذلك طول نصف قطر دائرتها فيكون

القياس الدائرى للزاوية المركزية

$$= \frac{\text{طول القوس المقابل لها}}{\text{نصف قطر دائرتها}} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$$

الزاوية النصف قطرية

قام علماء الرياضيات بقياس نصف قطر دائرة ما وليكن نق وقاموا بتقسيم الدائرة الى اقواس طول كلا منها = نق أى نصف قطر الدائرة فوجدوا الدائرة قد قسمت الى ٦ اقواس و ٠,٢٨ تقريبا من القوس فكل زاوية قابلت اى قوس من الاقواس الستة سميت بالزاوية النصف قطرية لأن طول القوس المقابل لها = نصف قطر دائرتها

الزاوية النصف قطرية :
هى زاوية مركزيه طول القوس المقابل لها = طول نصف قطر دائرتها

وعندما يكون ل = نق فإن $\theta = \frac{ل}{نق} = \frac{ل}{ل} = ١^{ء}$

أى ان وحدة القياس الزاوية بالتقدير الدائرى هى الزاوية النصف قطرية

المعنى الحقيقى لوحدة قياس الزاوية

ما معنى قولنا أن الزاوية

$\theta = ٢٠^{\prime\prime}\ ٣٠^{\prime}\ ٤٠^{\circ}$

هذا يعنى انه لدينا زاوية ما إذا وضعنا هذه الزاوية فى دائرة مقسمة الى ٣٦٠ قوس وكل قوس منهم مقسم الى ٦٠ قوس اصغر وكذلك كل قوس مقسم الى ٦٠ اخرين اصغر ووضعنا الضلع الابتدائى لهذه الزاوية على احد الاقواس التى تمثل الدرجات فإن ضلعها النهائى يكون تجاوز القوس رقم ٤٠ ولكن بعد ٣٠ قوس من الاقواس الصغرى التى تمثل الدقائق وكذلك تجاوز القوس رقم ٣٠ من الاقواس الصغرى التى تمثل الدقائق وثبت عند القوس رقم ٢٠ الذى يمثل الثوانى اى ان قياس الزاوية بالتقدير الستينى هو معرفة كم قوس من الاقواس التى تمثل الدرجات والدقائق والثوانى ستكون مقابلة لهذه الزاوية

ما معنى قولنا أن الزاوية

$\theta^{ء} = ١,٥^{ء}$ زاوية نصف قطرية

ايضا نجد انه لدينا زاوية ما وضعناها فى الدائرة المقسمة الى ٦,٢٨ من الاقواس التى طولها = طول نصف قطر الدائرة بحيث ضلعها الابتدائى على بداية احد الاقواس والنهائى نجده تجاوز قوس واحد وثبت فى منتصف القوس الثانى

اى ان قياس الزاوية بالتقدير الدائرى هو معرفة كم قوس يقابل الزاوية من تلك الاقواس التى طولها = طول نصف قطر الدائرة

ملاحظات مهمة :

(١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة نق = وحدة الاطوال فإن

قياس الزاوية بالتقدير الدائرى = طول القوس المقابل لها

(٢) الزاوية المركزية التى تحصر قوسا طوله ضعف طول قطر الدائرة يكون قياسها = $٢^{ء}$

حيث ل = ٢ نق

(٣) الزاوية المركزية التى قياسها الدائرى = $٠,٥^{ء}$ يكون طول القوس المقابل لها = نصف طول نصف قطر الدائرة

العلاقة بين التقديرين الدائرى والستينى للزاوية

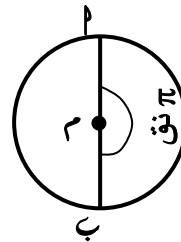
المعنى الحقيقى للعلاقة بين التقديرين الدائرى والستينى هو معرفة كم قوسا ستينيا وكم قوس دائريا يقابلان نفس الزاوية او بطريقة أخرى إذا كان لدينا زاوية ما قياسها الستينى ٣٠° لذا فإنها تقابل ٣٠ قوس

لتحويلها للتقدير الدائرى يجب معرفة الـ ٣٠ قوس تقابل كم من الاقواس فى النظام الدائرى ولإيجاد العلاقة بينهما لاحظ ما يأتى :

لنفرض زاوية مركزية تقابل نصف الدائرة

قياسها بالتقدير الدائرى

$$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{\pi\ نق}{نق} = \pi$$

$$\therefore \theta^{د} = \pi \quad \text{———} \quad (١)$$

قياسها بالتقدير الستيني

القياس الستينى لهذه الزاوية المركزية التى تقابل نصف الدائرة = ١٨٠

$$\theta^{\circ} = ١٨٠ \quad \text{———} \quad (٢)$$

وبقسمة المعادلة (١) على (٢) أو العكس نجد أن :

$$\frac{\theta^{د}}{\theta^{\circ}} = \frac{\pi}{١٨٠} \quad أو \quad \frac{\theta^{\circ}}{\theta^{د}} = \frac{١٨٠}{\pi}$$

$$\theta^{\circ} = \frac{\theta^{د} \times ١٨٠}{\pi} \quad و \quad \theta^{د} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠}$$

ملاحظات مهمة :

(١) إذا علم قياس زاوية معينة بالتقدير الدائرى بدلالة π فإنه يتم التعويض عن π بـ ١٨٠ مباشرة دون الرجوع للقانون وإذا استخدمنا القانون سنحصل على نفس النتيجة

(٢) إذا علم قياس زاوية بالتقدير الستيني وأراد قياسها بالتقدير الدائرى فإنه نوجد الزاوية بالتقدير الدائرى بدلالة π إذا لم يطلب غير ذلك

مثال ١ : أوجد القياس الدائرى لكلا من الزوايا الاتية مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين

(١) ٣٠ (٢) ٤٥ (٣) ٦٠ (٤) ٩٠ (٥) ١٢٠

(٦) $٣٠'\ ١٢٠^{\circ}$ (٧) $٤٠''\ ٥٠'\ ١٠٠^{\circ}$

الحل

(١) $\theta^{\circ} = ٣٠^{\circ}$

$$\Leftarrow \theta^{د} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠} = \frac{\pi \times ٣٠}{١٨٠} = \frac{\pi}{٦} = ٠,٥٢^{د}$$

(٢) $\theta = ٤٥^{\circ} \Leftarrow \theta^{د} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠}$

$$\theta^{د} = \frac{\pi \times ٤٥}{١٨٠} = \frac{\pi}{٤} = ٠,٧٩^{د}$$

(٣) $\theta = ٦٠^{\circ}$ متروك

....

....

(٤) $\theta = ٩٠ \Leftarrow \theta^{د} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠}$

$$\theta^{د} = \frac{\pi \times ٩٠}{١٨٠} = \frac{\pi}{٢} = ١,٥٨^{د}$$

(٥) $\theta = ١٢٠ \Leftarrow \theta^{د} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠}$

$$\theta^{د} = \frac{\pi \times ١٢٠}{١٨٠} = \frac{٢\pi}{٣} = ٢,٠٩^{د}$$

(٦) $\theta = ٣٠'\ ١٢٠^{\circ} \Leftarrow \theta^{د} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠}$

$$\theta^{د} = \frac{٣٠'\ ١٢٠^{\circ} \times \pi}{١٨٠} = ٢,١^{د}$$

(٧) $\theta = ٤٠''\ ٥٠'\ ١٠٠^{\circ}$ متروك

مثال ٢ : أوجد القياس الستينى لكلا من الزوايا الاتية

(١) ٥,٥ (٢) ٠,٨٢ (٣) ٢,٨ (٤) ١

(٥) $\frac{٢\pi}{٣}$ (٦) $\frac{٤\pi}{٣}$ (٧) $\frac{٣\pi}{٢}$ (٨) $\frac{\pi}{٢}$

الحل

(١) $\theta^{د} = ٥,٥ \Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{د} \times ١٨٠}{\pi}$

$$\theta^{\circ} = \frac{٥,٥ \times ١٨٠}{\pi} = ٣٦''\ ٧'\ ٣١٥^{\circ}$$

(٢) $\theta^{د} = ٠,٨٢ \Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{د} \times ١٨٠}{\pi}$

$$\theta^{\circ} = \frac{٠,٨٢ \times ١٨٠}{\pi} = ٥٧''\ ٥٨'\ ٤٦^{\circ} \simeq ٤٧^{\circ}$$

(٣) $\theta^{د} = ٢,٨ \Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{د} \times ١٨٠}{\pi}$

$$\theta^{\circ} = \frac{٢,٨ \times ١٨٠}{\pi} = ٤١''\ ٢٥'\ ١٦٠^{\circ}$$

(٤) بنفسك

(٥) $\theta^{ء} = \frac{٢\pi}{٣} \Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠}{\pi}$

$\theta^{\circ} = \frac{\frac{٢\pi}{٣} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{٢ \times ١٨٠}{٣} = ١٢٠^{\circ}$

(٦) $\theta^{ء} = \frac{٤\pi}{٣} \Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠}{\pi}$

$\theta^{\circ} = \frac{\frac{٤\pi}{٣} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{١٨٠ \times ٤}{٣} = ٢٤٠^{\circ}$

(٧) $\theta^{ء} = \frac{٣\pi}{٢} \Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{١٨٠ \times ٣}{٢} = ٢٧٠^{\circ}$

(٨) $\theta^{ء} = \frac{\pi}{٢}$ بنفسك

مثال ٣ : أوجد بدلالة π القياس لكلا من الزوايا الاتية

(١) ١٣٥° (٢) ١٨٠° (٣) ٣٦٠° (٤) ٢٧٠°
(٥) ١٥٠° (٦) ٣٠٠° (٧) – ٢٧٠° (٨) – ٨٧٠°

الحل

(١) $\theta^{\circ} = ٩٣٥ \Leftarrow \theta^{ء} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠} = \frac{١٣٥ \times \pi}{١٨٠} = \frac{٣\pi}{٤}$

(٢) $\theta^{\circ} = ٩٨٠ \Leftarrow \theta^{ء} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠} = \frac{١٨٠ \times \pi}{١٨٠} = \pi$

(٣) $\theta^{\circ} = ٩٦٠ \Leftarrow \theta^{ء} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠} = \frac{٣٦٠ \times \pi}{١٨٠} = ٢\pi$

٤ ، ٥ ، ٦ متروك

(٧) $\theta^{\circ} = -٢٧٠ + ٣٦٠ = ٩٠$

$\Leftarrow \theta^{ء} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠} = \frac{٩٠ \times \pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٢}$

(٨) $\theta^{\circ} = -٨٧٠ + ١٠٨٠ = ٢١٠$

$\Leftarrow \theta^{ء} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠} = \frac{٢١٠ \times \pi}{١٨٠} = \frac{٧\pi}{٦}$

مثال ٤ : أوجد القياس السالب لكلا من الزوايا الموجبة الاتية

(١) ٧٢° (٢) ٤٠ً ٣٠َ ١٥٠° (٣) ٤٠٥°
(٤) ١٥٠° (٥) ٢٧٠° (٦) ٦٠٠

الحل

(١) θ = ٧٢ – ٣٦٠ = -٢٨٨

(٢) θ = ٤٠ً ٣٠َ ١٥٠° - ٣٦٠ = -٢٠ً ٢٩َ ٢٠٩°

(٣) θ = ٤٠٥ – ٣٦٠ = ٤٥ – ٣٦٠ = -٣١٥°

(٤) θ = ١٥٠ – ٣٦٠ = -٢١٠

٥ ، ٦ متروك

مثال ٥ : أوجد القياس الموجب لكلا من الزوايا السالبة الاتية

(١) – ٧٢ (٢) -٨٧٠ (٣) – ٣٠ً ٤٠َ ٩٠٠
(٤) - ١٢٠ (٥) -٣٥٠ (٦) - ٢١٠

الحل

(١) θ = -٧٢ + ٣٦٠ = ٢٨٨°

(٢) θ = – ٨٧٠ + ١٠٨٠ = ٢١٠°

(٣) θ = – ٣٠ً ٤٠َ ١٠٠° + ٣٦٠ = ٣٠ً ٢٠َ ٢٥٩°

(٤) θ = -١٢٠ + ٣٦٠ = ٢٤٠°

(٥) θ = -٣٥٠ + ٣٦٠ = ١٠°

(٦) بنفسك

مثال ٦ : أوجد زاويتين إحداهما قياسها موجب والاخرى قياسها سالب مكافئتين لكل زاوية من الزوايا التى قياسها

(١) ١٣٥ (٢) - ٢٥ (٣) ٣٦َ ١٧٩°
(٤) ٩٤٠ (٥) $\frac{١١\pi}{٨}$ (٦) $\frac{٢\pi}{٣}$

الحل

(١) س = ١٣٥
الزاوية الموجبة التى تكافئها = ١٣٥ + ٣٦٠ = ٤٩٥
الزاوية السالبة التى تكافئها = ١٣٥ – ٣٦٠ = - ٢٢٥

(٢) س = - ٢٥
الزاوية الموجبة التى تكافئها = -٢٥ + ٣٦٠ = ٣٣٥
الزاوية السالبة التى تكافئها = -٢٥ – ٣٦٠ = -٣٨٥

(٣) بنفسك

(٤) س = ٩٤٠ $\Leftarrow \theta$ = ٩٤٠ – ٧٢٠ = ٩٢٠
∴ س = ٢٢٠
الزاوية الموجبة التى تكافئها = ٢٢٠ + ٣٦٠ = ٥٨٠
الزاوية السالبة التى تكافئها = ٢٢٠ – ٣٦٠ = -١٤٠

(٥) $\theta = \frac{١١\pi}{٨}$

الزاوية الموجبة التى تكافئها = $\frac{١١\pi}{٨} + ٢\pi = \frac{٢٧\pi}{٨}$

الزاوية السالبة التى تكافئها = $\frac{١١\pi}{٨} - ٢\pi = -\frac{٥\pi}{٨}$

(٦) بنفسك

مثال ٧ : أوجد القياس الستينى والدائرى للزاوية المركزية التى تحصر قوسا طوله ل فى دائرة طول نصف قطرها نق إذا كان :

(١) ل = ١٢ سم ، نق=١٠ سم
(٢) ل=١٤ سم ، نق=٧ سم
(٣) ل=٢π ، نق = ٨ سم
(٤) ل = ٤,٥ سم ، نق=٩ سم

الحل

(١) $\theta = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \theta^{ء} = \frac{١٢}{١٠} = ١,٢^{ء}$

$\Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{١,٢ \times ١٨٠}{\pi} =$ ....

(٢) $\theta = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \theta^{ء} = \frac{١٤}{٧} = ٢^{ء}$

$\Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{٢ \times ١٨٠}{\pi} =$ ....

(٣) $\theta = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \theta^{ء} = \frac{٢\pi}{٨} = \frac{\pi}{٤}$

$\Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{١٨٠}{٤} = ٤٥^{\circ}$

(٤) بنفسك

مثال ٨ : أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها θ وطول القوس المحصور ل إذا كان :

(١) $\theta^{ء} = \frac{٢\pi}{٣}$ ، ل =٢٠ سم
(٢) $\theta^{\circ} = ١٥٠$ ، ل =٢٥ سم
(٣) $\theta^{ء} = ١,٥^{ء}$ ، ل =٣٥ سم
(٤) $\theta^{\circ} = ١٢٠$ ، ل =٢٠ سم

الحل

(١) $\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \frac{٢\pi}{٣} = \frac{٣٠}{نق}$

$\Leftarrow نق = \frac{٣ \times ٢٠}{٢\pi} = \frac{٣٠}{\pi} = ٩,٥٥$ سم

(٢) $\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$ ولكن $\theta^{\circ} = ١٥٠$

أى أن الزاوية بالتقدير الستينى لذا يجب تحويلها الى التقدير الدائرى $\therefore \theta^{ء} = \frac{١٥٠\pi}{١٨٠} = \frac{٥\pi}{٦}$

$\therefore \theta^{ء} = \frac{ل}{ذق} \Leftarrow \frac{٥\pi}{٦} = \frac{٢٥}{ذق}$

$\Leftarrow نق = \frac{٦ \times ٢٥}{٥\pi} = \frac{٣٠}{\pi} = ٩,٥٥$ سم

(٣) $\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow ١,٥ = \frac{٣٥}{ذق}$

$\therefore نق = \frac{٣٥}{١,٥} = ٢٣,٣٣$ سم

(٤) بنفسك

مثال ٩ : أوجد لأقرب جزء من عشرة طول القوس من الدائرة التى طول نصف قطرها نق ويقابله زاوية مركزية قياسها θ عندما

(١) نق =١٢,٥سم ، نق=$١,٦^{ء}$
(٢) نق=٢٠ سم ، $\theta=٢,٤^{ء}$
(٣) نق = ١٥ سم ، س =٦٠
(٤) نق = ٢٠ سم ، س =٢٤٠ °

الحل

(١) $\therefore \theta^{ء} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow ل = \theta^{ء} \times نق$

ل = ١٢,٥ × ١,٦ = ٢٠ سم

(٢) بنفسك

(٣) س = ٦٠ °

ولكن يجب ان تكون الزاوية بالتقدير الدائرى

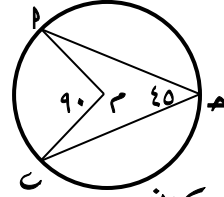
$\therefore \theta^{ء} = \frac{٦٠\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٣}$

$\because \theta^{ء} = \frac{ل}{ذق} \Leftarrow ل = \theta^{ء} \times نق$

$\therefore ل = \frac{\pi}{٣} \times ١٥ = ٥\pi = ١٥,٧$ سم

(٤) بنفسك

مثال ١٠ : أوجد محيط الدائرة التى فيها قوس طوله ٢١سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥ °

الحل

محيط الدائرة = ٢ π نق

يجب إيجاد نصف قطر الدائرة

$\because \theta^{د} = \frac{ل}{نق}$ ولإيجاد نق يجب أن يكون

معلوم لدينا ل ، $\theta^{د}$ حيث $\theta^{د}$

هى القياس الدائرى للزاوية المركزية

قياس الزاوية المركزية = ضعف المحيطية

المشتركة معها فى نفس القوس

حيث اننا نتعامل مع الزاوية المركزية

$\therefore \theta = ٢ \times ٤٥ = ٩٠$

$\therefore \theta^{د} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠} = \frac{٩٠ \times \pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٢}$

$\because \theta^{د} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \frac{\pi}{٢} = \frac{١٢}{نق} \Leftarrow نق = \frac{٢ \times ١٢}{\pi} = \frac{٢٤}{\pi}$

المحيط = ٢ π نق = ٢ × π × $\frac{٢٤}{\pi}$ = ٢ × ٢٤ = ٤٨ سم

مثال ١٢ : النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعى هى ٢ : ٢ : ٣ : ٥ أوجد القياس الدائرى والستينى لهذه الزوايا

الحل

نفرض ان الزوايا هى على الترتيب ٲ ، ب ، هـ ، ٶ

$\therefore$ ق (ٲ) : ق (ب) : ق (هـ) : ق (ٶ) = ٢ : ٢ : ٣ : ٥

ق (ٲ) = ٢ك ق (ب) = ٢ك ق (هـ) = ٣ك

ق (ٶ) = ٥ك

ولكن مجموع زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠

$\therefore$ ٢ك + ٢ك + ٣ك + ٥ك = ٣٦٠

$\Leftarrow$ ١٢ك = ٣٦٠ ك = ٣٠

$\therefore$ ق (ٲ) = ٢ك = ٢ × ٣٠ = ٦٠

ق (ب) = ٢ك = ٢ × ٣٠ = ٦٠

ق (هـ) = ٣ك = بنفسك

ق (ٶ) = ٥ك = بنفسك

حول الزوايا للقياس الدائرى بنفسك

مثال ١٣ : زاويتان مجموعهما ١٣٠ ° والفرق بينهما $\frac{\pi}{٦}$ أوجد الزاويتان بالتقديران الدائرى والستينى

الحل

نفرض أن الزاويتان هما س ، ص لذا فإن :

س + ص = ١٣٠ ، س – ص = $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{١٨٠}{٦}$ = ٣٠

س + ص = ١٣٠

س – ص = ٣٠ بالجمع

٢س = ١٦٠ $\Leftarrow$ ص = ٨٠ °

بالتعويض فى س + ص = ١٣٠

$\Leftarrow$ ٨٠ + ص = ١٣٠

ص = ١٣٠ – ٨٠ = ٥٠ °

مثال ١٤ : بنول يتذبذب خلال زاوية قياسها الستينى ١٣٥° صانعا قوسا من دائرة طوله ١٢سم أوجد طول البندول

الحل

طول البندول يمثله نصف قطر الدائرة نق

الزاوية التى يتذبذب خلالها البندول هى

الزاوية المركزية

س° = ١٣٥ ° بالتقدير الستينى

يجب تحويل الزاوية للتقدير الدائرى :

$\theta^{د} = \frac{١٣٥ \times \pi}{١٨٠} = \frac{٣\pi}{٤}$

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \frac{٣\pi}{٤} = \frac{١٢}{نق}$

نق = $\frac{٤ \times ١٢}{٣\pi} = \frac{٤٨}{٣\pi}$ = ٥,١ سم

$\therefore$ طول البندول = ٥,١ سم

الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها

الدوال المثلثية هى دوال تربط بين أسواء كان قائما او حادا او منفرجا ودراستنا هذا العام ستتركز على الدوال المثلثية للزاوية الحادة فى المثلث القائم وهذه الدوال هي :

(١) دالة جيب الزاوية جا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية sin

(٢) دالة جيب التمام جتا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية co - sin = cos

(٣) دالة ظل الزاوية ظا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية tan

والدوال السابقة دوال أساسية ومقلوباتها :

(١) دالة قاطع الزاوية قا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية sec

(٢) دالة قاطع تمام الزاوية قتا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية cosec

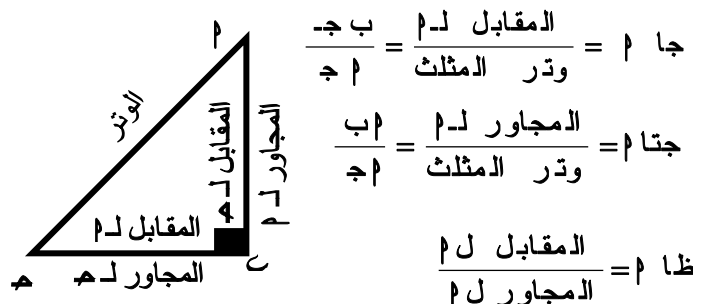
(٣) دالة ظل تمام الزاوية ظتا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية cot

أى أن :

- جا ؟ = $\frac{١}{\text{قتا ؟}}$ ⟸ جا ؟ × قتا ؟ = ١
- جتا ؟ = $\frac{١}{\text{قا ؟}}$ ⟸ جتا ؟ × قا ؟ = ١
- ظا ؟ = $\frac{١}{\text{ظتا ؟}}$ ⟸ ظا ؟ × ظتا ؟ = ١

علاقة الدوال المثلية بالمثلث القائم

إذا كان ؟ ب هـ Δ قائم الزاوية فى ب فإن ؟هـ وترا فى المثلث ، ؟ ب ، ب هـ ضلعا القائمة ويكون

جا ؟ = $\frac{\text{المقابل لـ ؟}}{\text{وتر المثلث}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{؟ جـ}}$

جتا ؟ = $\frac{\text{المجاور لـ ؟}}{\text{وتر المثلث}}$ = $\frac{\text{ب؟}}{\text{؟جـ}}$

ظا ؟ = $\frac{\text{المقابل ل ؟}}{\text{المجاور ل ؟}}$

أكمل

جا هـ = ... ظا هـ = ... جتا هـ = ...

قتا هـ = ... قا هـ = ... ظتا هـ = ...

دائرة الوحدة :

هى دائرة طول نصف قطرها = الوحدة و مركزهذه الدائرة هو نقطة الاصل لنظام احداثى متعامد فيكون المركزهو النقطة و = (٠ ، ٠)

ويكون المحورين هما الافقى س سَ والرأسى ص صَ أى ان : و ب = و ؟ = ١ وحدة طول

ومن هندسة الشكل نجد أن :

Δ و ب هـ قائم الزاوية فى هـ

⟸ (وب)^٢ = (ب هـ)^٢ + (وهـ)^٢

وبإعتبار أن و هـ = س ، ب هـ = ص ، و ب = ١

∴ (١)^٢ = (ص)^٢ + (س)^٢ ⟸ س^٢ + ص^٢ = ١

∴ س^٢ + ص^٢ = ١ ———— (١)

جا θ = $\frac{ص}{١}$ = ص ⟸ ص = جا θ ——— (٢)

جتا θ = $\frac{س}{١}$ = س ⟸ س = جتا θ ——— (٣)

ظا θ = $\frac{ص}{س}$ ⟸ $\frac{ص}{س}$ = ظا θ ——— (٤)

قوانين دائرة الوحدة :

- س^٢ + ص^٢ = ١
- ص = جا θ
- س = جتا θ
- $\frac{ص}{س}$ = ظا θ

ملاحظات مهمة :

(١) نجد أن س ، ص لا تتعدى القيمة ١ (نصف قطر دائرة الوحدة) ولا تقل عن -١ أى أن

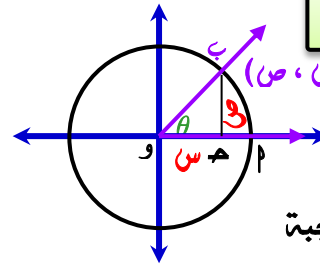
- -١ ≤ س ≤ ١ ، -١ ≤ ص ≤ ١
- -١ ≤ جتا θ ≤ ١ ، -١ ≤ جا θ ≤ ١

(٢) إذا كانت ب (س ، ص) هى نقطة تقاطع الضلع النهائى للزاوية θ مع دائرة الوحدة فإنه يمكن التعبر عنها بالنقطة ب = (جتا θ ، جا θ)

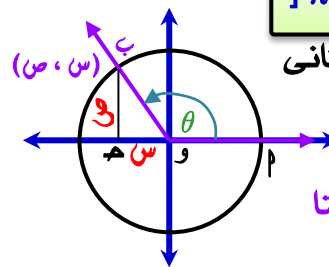
(٣) بالتعويض فى دائرة الوحدة عن س ، ص بـ جتا θ ، جا θ نجد أن : جتا^٢ θ + جا^٢ θ = ١

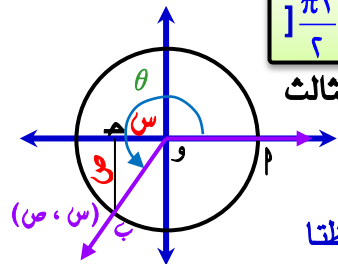
- جتا^٢ θ = ١ – جا^٢ θ
- جا^٢ θ = ١ – جتا^٢ θ

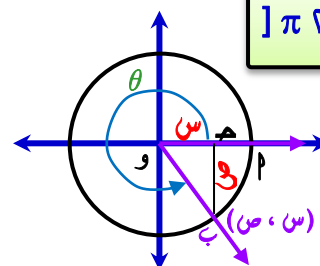
إشارات الدوال المثلثية

بفرض أن ∠ أ و ب زاوية موجهة فى الوضع القياسى وكانت ب (س ، ص) هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لهذه الزاوية مع دائرة الوحدة وأن قياسها θ لذا فإن :

(١) إذا كانت $\theta \in]\cdot ، \frac{\pi}{٢}[$

النقطة ب تقع فى الربع الاول
ويكون س > ٠ ، ص > ٠
أى ان س ، ص موجبتين
فيكون كل الدوال المثلثية موجبة

(٢) إذا كانت $\theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$

تكون النقطة ب فى الربع الثانى
ويكون س < ٠ ، ص > ٠
أى أن س سالبة و ص موجبة
فيكون جا ومعكوستها قتا فقط موجبة فى الربع الثانى

(٣) إذا كانت $\theta \in]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$

تكون النقطة ب فى الربع الثالث
ويكون س < ٠ ، ص < ٠
أى أن س و ص سالبتين
فيكون ظا ومعكوستها ظتا فقط موجبة فى الربع الثالث

(٤) إذا كانت $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$

تكون النقطة ب فى الربع الرابع
ويكون س > ٠ ، ص < ٠
أى أن س موجبة و ص سالبة
فيكون جتا ومعكوستها قا فقط موجبة فى الرابع

إشارات الدوال المثلثية

جا ، قتا موجبتين (الربع الثانى)	الكل موجب (الربع الأول)
ظا ، ظتا موجبتين (الربع الثالث)	جتا ، قا موجبتين (الربع الرابع)

٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠ ، ٠

مثال ١ : أبحث إشارة القيم الاتية

(١) جتا ٣٥٠ (٢) ظا ١٠٠ (٣) قا ٢٦٥
(٤) جا (- ١٦٥) (٥) قتا ١٢٠٠ (٦) ظتا $\frac{٣\pi}{٢}$
(٧) جا $\frac{٥\pi}{٤}$ (٨) قتا $\frac{٣\pi}{٢}$ (٩) قا (- $\frac{٢٥\pi}{٦}$)

الحل

(١) جتا ٣٥٠ ⟸ ٢٧٠ < ٣٥٠ < ٣٦٠
الزاوية فى الربع الرابع جتا فى الربع الرابع موجبه
∴ جتا ٣٥٠ = +

(٢) ظا ١٠٠ ⟸ ٩٠ < ١٠٠ < ١٨٠
الزاوية فى الربع الثانى ظا فى الربع الثانى سالبة
∴ ظا ١٠٠ = -

(٣) قا ٢٦٥ ⟸ ١٨٠ < ٢٦٥ < ٢٧٠
الزاوية فى الربع الثالث قا فى الربع الثالث سالبة لأنها معكوسة جا ∴ قا ٢٦٥ = -

(٤) جا (- ١٦٥) ⟸ س° = - ١٦٥ + ٣٦٠ = ١٩٥ °
الزاوية تقع فى الربع الثالث
جا فى الربع الثالث سالبه ∴ جا (- ١٦٥) = -

(٥) قتا ١٢٠٠ ⟸ θ = ١٢٠٠ – ١٠٨٠ = ١٢٠
الزاوية تقع فى الربع الثانى
قتا فى الربع الثانى موجبة لأنهها معكوسة جا
∴ قتا ١٢٠٠ = +

(٦) ظتا $\frac{٣\pi}{٢}$ ⟸ θ = $\frac{٣\pi}{٢}$ = $\frac{٣ \times ١٨٠}{٢}$ = ٢٧٠
الزاوية محورية لا تقع فى اى ربع لذا فإن ظتا ٢٧٠ غير معروفة الاشارة

(٧) جا $\frac{٥\pi}{٤}$ ⟸ θ = $\frac{٥\pi}{٤}$ = $\frac{٥ \times ١٨٠}{٤}$ = ٢٢٥
الزاوية تقع فى الربع الثالث
جا فى الربع الثالث سالبة ⟸ ∴ جا ٢٢٥ = -

٨ ، ٩ بنفسك

مثال ٢ : إذا كانت θ هى قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ، ب نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ فى الحالات الاتية

(١) ب(٠,٦ ، ص) ، ص > ٠

(٢) ب(س ، -٠,٨) ، س > ٠

(٣) ب($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ص) ، $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$

(٤) ب(٩م ، ١٢م) ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$

(٥) ب(-١ ، ص)

(٦) ب(-ل ، ل) ، ل > ٠

الحل

(١) ب (٠,٦ ، ص) ، ص > ٠ ⟸ س > ٠ ، ص > ٠

∴ الزاوية θ فى الربع الاول

ومن دائرة الوحدة

س² + ص² = ١

(٠,٦)² + ص² = ١

٠,٣٦ + ص² = ١

ص² = ١ − ٠,٣٦ = ٠,٦٤

ص = $\sqrt{٠,٦٤}$ = ± ٠,٨ ولكن ص > ٠

∴ ص = ٠,٨

∴ ص = جا θ = ٠,٨ ، س = جتا θ = ٠,٦

فيكون :

∴ جا θ = $\frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ⟸ قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

جتا θ = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ⟸ قا θ = $\frac{٥}{٣}$

ظا θ = $\frac{ص}{س} = \frac{٠,٨}{٠,٦} = \frac{٤}{٣}$ ⟸ ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

(٢) ب(س ، -٠,٨) ، س > ٠ ⟸ س > ٠ ، ص < ٠

تكون θ فى الربع الرابع

من قانون دائرة الوحدة

س² + ص² = ١

س² + (-٠,٨)² = ١

س² + ٠,٦٤ = ١

س² = ١ − ٠,٦٤ = ٠,٣٦ س² = ٠,٣٦

⟸ س = $\sqrt{٠,٣٦}$ = ± ٠,٦

ولكن س > ٠ ∴ س = ٠,٦

جا θ = ص = -٠,٨ = $-\frac{٨}{١٠} = -\frac{٤}{٥}$

جتا θ = س = ٠,٦ = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

ظا θ = $\frac{ص}{س} = -\frac{٤}{٣}$

فيكون :

∴ جا θ = $-\frac{٤}{٥}$ ، جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا θ = $-\frac{٤}{٣}$

قتا θ = $-\frac{٥}{٤}$ ، قا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا θ = $-\frac{٣}{٤}$

(٣) ب($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ص) ، $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$

الزاوية تنحصر بين ٩٠ ، ١٨٠ لذا فإن الزاوية θ تقع فى الربع الثانى

ومن قانون دائرة الوحدة :

س² + ص² = ١

$(-\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢$ + ص² = ١ ⟸ $\frac{٣}{٤}$ + ص² = ١

⟸ ص² = ١ - $\frac{٣}{٤} = \frac{٤-٣}{٤} = \frac{١}{٤}$

⟸ ص = $\sqrt{\frac{١}{٤}} = \pm\frac{١}{٢}$

ولكن الزاوية فى الربع الثانى لذا فإن ص موجبة

∴ ص = $\frac{١}{٢}$

∴ ص = جا θ = $\frac{١}{٢}$ ، س = جتا θ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\frac{ص}{س}$ = ظا θ = $\frac{١}{٢} \div -\frac{\sqrt{٣}}{٢} = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

فيكون :

∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$ ، جتا θ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظا θ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

قتا θ = $\frac{٢}{١}$ ، قا θ = $-\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ظتا θ = $-\sqrt{٣}$

(٤) ب(٩م ، ١٢م) ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$

الزاوية تنحصر بين ١٨٠ ، ٢٧٠

لذا فإن الزاوية θ تقع فى الربع الثالث

ومن قانون دائرة الوحدة نجد أن :

س² + ص² = ١

(٩م)² + (١٢م)² = ١

٨١ م² + ١٤٤ م² = ١ ⟸ ٢٢٥ م² = ١

∴ $أ^2 = \frac{1}{225}$ ⟸ $أ = \sqrt{\frac{1}{225}} = \pm \frac{1}{15}$

ولكن س = ٩ أ وإشارتها تعتمد على اشارة أ
وإشارة س فى الربع الثالث سالبة لذا لابد أن تكون أ سالبة ∴ $أ = -\frac{1}{15}$

∴ ص = ١٢ أ = $12 \times -\frac{1}{15} = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$ = جا θ

∴ س = ٩ أ = $9 \times -\frac{1}{15} = -\frac{9}{15} = -\frac{3}{5}$ = جتا θ

∴ $\frac{ص}{س} = \frac{12أ}{9أ} = \frac{4}{3}$ = ظا θ

فيكون :

جا $\theta = -\frac{4}{5}$ ، جتا $\theta = -\frac{3}{5}$ ، ظا $\theta = \frac{4}{3}$

قتا $\theta = -\frac{5}{4}$ ، قا $\theta = -\frac{5}{3}$ ، ظتا $\theta = \frac{3}{4}$

(٥) ب (- ١ ، ص)

النقطة ب مسقطها السينى = ١ لذا فإن الزاوية θ لا تقع فى اى ربع لأنها زاوية ربعية (محورية)

من قانون دائرة الوحدة ⟸ $س^2 + ص^2 = 1$

$(-1)^2 + ص^2 = 1$ ⟸ $1 + ص^2 = 1$

$ص^2 = 1 - 1$ = صفر ⟸ ص = صفر

س = - ١ = جتا θ ، ص = ٠ = جا θ

$\frac{ص}{س} = \frac{0}{-1}$ = ظا θ

فيكون :

جا θ = ٠ ، جتا θ = - ١ ، ظا θ = صفر

قتا θ = غير معرف ، قا θ = - ١ ، ظتا θ = غير معرف

(٦) ب(- ل ، ل) ، ل > ٠ بنفسك

مثال ٣ : اوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ فى كلا من الحالات الاتية

(١) $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$ ، جتا θ = ٠,٦

(٢) $\theta \in]\frac{\pi}{2} ، \pi[$ ، ظا $\theta = -\frac{3}{4}$

(٣) $\theta \in]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi[$ ، قا θ = ٢

(٤) $\theta \in]\pi ، \frac{3\pi}{2}[$ ، قتا $\theta = -\frac{25}{7}$

(٥) $\theta \in]\frac{\pi}{2} ، \pi[$ ، جا $\theta = \frac{12}{13}$

الحل

(١) $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$ ، جتا θ = ٠,٦

الزاوية تقع فى الربع الاول لأنها تنحصر بين ٠ ، ٩٠

جتا θ = س = ٠,٦

∴ النقطة ب = (٠,٦ ، ص)

ومن دائرة الوحدة

$س^2 + ص^2 = 1$ ⟸ $(0.6)^2 + ص^2 = 1$

$0.36 + ص^2 = 1$ $ص^2 = 1 - 0.36 = 0.64$

$ص = \sqrt{0.64} = \pm 0.8$ ولكن ص > ٠

∴ ص = ٠,٨

∴ ص = جا θ = ٠,٨ ، س = جتا θ = ٠,٦

فيكون :

جا $\theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ ⟸ قتا $\theta = \frac{5}{4}$

جتا $\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ⟸ قا $\theta = \frac{5}{3}$

ظا $\theta = \frac{ص}{س} = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3}$ ⟸ ظتا $\theta = \frac{3}{4}$

(٢) $\theta \in]\frac{\pi}{2} ، \pi[$ الزاوية تقع فى الربع الثانى

ظاهـ = $-\frac{3}{4} = \frac{ص}{س}$

∴ س = -٤ك ، ص = ٣ك

من دائرة الوحدة :

$س^2 + ص^2 = 1$ ⟸ $(-4ك)^2 + (3ك)^2 = 1$

$16ك^2 + 9ك^2 = 1$ ⟸ $25ك^2 = 1$ ⟸ $ك^2 = \frac{1}{25}$

∴ $ك = \sqrt{\frac{1}{25}} = \pm \frac{1}{5}$

ولكن الزاوية فى الربع الثانى
والمسقط السينى سالب س = - ٤ك ∴ $ك = \frac{1}{5}$

∴ جتاهـ = س = - ٤ك = $-4 \times \frac{1}{5} = \frac{-4}{5}$

∴ جاهـ = ص = ٣ك = $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

اوجد باقى الدوال المثلثية

(٣) $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ ، $\text{قا}\,\theta = 2$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{1}{2} \Longleftarrow \text{س} = \frac{1}{2}$

الزاوية تقع فى الربع الرابع

لأنها تنحصر بين ٢٧٠ ، ٣٦٠ ومن قانون دائرة الوحدة نجد أن :

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1 \Longleftarrow (\frac{1}{2})^2 + \text{ص}^2 = 1$

$\frac{1}{4} + \text{ص}^2 = 1 \Longleftarrow \text{ص}^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Longleftarrow \text{ص} = \frac{3}{4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

وحيث أن الزاوية فى الربع الرابع نجد أن $\text{ص} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \text{جا}\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\text{جتا}\,\theta = \frac{1}{2}$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{-\sqrt{3}}{1}$

قتا θ = ... قا θ = ... ظتا θ = ...

(٤) ، (٥) متروك للطالب

مثال ٤ : إذا كانت $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{24}{25}$

أوجد قيمة :

(١) $\frac{\text{ظتا}\,\theta - \text{قتا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta - \text{قا}\,\theta}$ (٢) $\text{جتا}\,\theta - \text{قتا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta$

(٣) $\text{قتا}\,\theta\,\text{جا}\,\theta - \text{ظا}\,\theta\,\text{ظتا}\,\theta + \text{جتا}^2\theta$

الحل

الزاوية تنحصر بين ٩٠ ، ١٨٠

لذا فإنها تقع فى الربع الثانى

$\text{جا}\,\theta = \frac{24}{25} = \text{ص}$

ومن قانون دائرة الوحدة :

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1 \Longleftarrow \text{س}^2 + (\frac{24}{25})^2 = 1$

$\text{س}^2 + \frac{576}{625} = 1 \Longleftarrow \text{س}^2 = 1 - \frac{576}{625} = \frac{625 - 576}{625} = \frac{49}{625}$

$\therefore \text{س}^2 = \frac{49}{625} \Longleftarrow \text{س} = \sqrt{\frac{49}{625}} = \pm\frac{7}{25}$

ولكن الزاوية فى الربع الثانى لذا فإن س < ٠ (سالبة)

$\therefore \text{س} = -\frac{7}{25}$

$\therefore \text{جا}\,\theta = \frac{24}{25}$ ، $\text{جتا}\,\theta = -\frac{7}{25}$ ، $\text{ظا}\,\theta = -\frac{24}{7}$

$\text{قتا}\,\theta = \frac{25}{24}$ ، $\text{قا}\,\theta = -\frac{25}{7}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = -\frac{7}{24}$

(١) $\frac{\text{ظتا}\,\theta - \text{قتا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta - \text{قا}\,\theta} = \frac{(-\frac{7}{24}) - (\frac{25}{24})}{(-\frac{24}{7}) - (-\frac{25}{7})} = \frac{(\frac{-7-25}{24})}{(\frac{-24+25}{7})}$

$= \frac{(-\frac{32}{24})}{(\frac{1}{7})} = \frac{(-\frac{4}{3})}{(\frac{1}{7})} = \frac{-4\times7}{3\times1} = \frac{-28}{3}$

(٢) $\text{جتا}\,\theta - \text{قتا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta = -\frac{7}{25} - \frac{25}{24} \times -\frac{24}{7} = -\frac{7}{25} + \frac{25}{7}$

$= \frac{-7\times7 + 25\times25}{25\times7} = \frac{-49+625}{175} = \frac{576}{175}$

(٣) بنفسك

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الزوايا الخاصة :

هى تلك الزوايا المحورية (الربعية) وتلك الزوايا التى لها قيم معروفة مع جميع الدوال المثلثية

فالزوايا الحدية هى { ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠ }

والزوايا الخاصة هى { ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ }

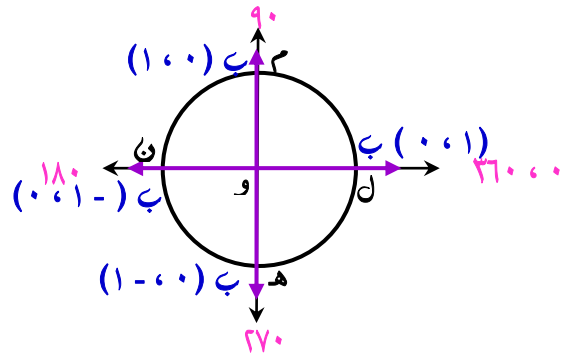
وكذلك كل زاوية تنتج من حاصل جمع او طرح الزوايا المحورية والزوايا الخاصة فهى ايضا زاوية خاصة أو زاوية مشهورة ولكن قيمها مع الدوال المثلثية سنتطرق له فى الدرس القادم

فما هى قيمة النس المثلثية لهذه الزوايا المحورية والخاصة

وللإجابة على هذا السؤال نتبع ما يأتى :

أولا الزوايا المحورية (الربعية)

بفرض أن الضلع النهائى للزاوية θ تتقاطع مع دائرة الوحدة فى النقاط ل ، م ، هـ ، ن وهى نفسها نقاط تقاطع دائرة الوحدة مع المحاور

٩٠
ب (٠ ، ١) م
ب (١ ، ٠) ٠ ، ٣٦٠
ن ل و
ب (-١ ، ٠) ١٨٠
ب (٠ ، -١) هـ
٢٧٠

(١) إذا كن الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة ل

(١) تكون الزاوية θ = صفر

(٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع هذا الضلع النهائى هى

ب = (١ ، ٠) = (س ، ص) = (جتا θ ، جا θ)

لذا فإن :

جا ٠ = ٠ جتا ٠ = ١ ظا ٠ = ٠

قتا ٠ = غير معرف قا ٠ = ١ ظتا ٠ = غير معرف

(٢) إذا كن الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة م

(١) تكون الزاوية θ = ٩٠

(٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع الضلع النهائى للزاوية θ

هى ب = (٠ ، ١) = (س ، ص) = (جا θ ، جتا θ)

لذا فإن :

جا ٩٠ = ١ جتا ٩٠ = ٠ ظا ٩٠ = غير معرف

قتا ٩٠ = ١ قا ٩٠ =غير معرف ظتا ٩٠ = ٠

(٣) إذا كن الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة ن

(١) تكون الزاوية θ = ١٨٠

(٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع الضلع النهائى للزاوية θ

هى ب = (-١ ، ٠) = (س ، ص) = (جا θ ، جتا θ)

لذا فإن :

جا ١٨٠ =٠ جتا ١٨٠ = -١ ظا ١٨٠ = ٠

قتا ١٨٠ =غير معرف قا ١٨٠ =- ١ ظتا١٨٠ =غير معرف

(٤) إذا كن الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة هـ

(١) تكون الزاوية θ = ٢٧٠

(٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع الضلع النهائى للزاوية θ

هى ب = (٠ ، -١) = (س ، ص) = (جا θ ، جتا θ)

لذا فإن :

جا ٢٧٠ =- ١ جتا ٢٧٠ = ٠ ظا ٢٧٠ =غير معرف

قتا ٢٧٠ =- ١ قا ٢٧٠ =غير معرف ظتا٢٧٠= ٠

ملخص لما سبق

٩٠
جا
١٨٠ ٠ ، ٣٦٠
جتا
٢٧٠

المحور س يمثل جتا لذا فإن

- الدالة جتا مع زوايا المحور س { ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ } ناتجها ١ أو -١ حسب موقع الزاوية فى الجزء الموجب او السالب
- الدالة جتا مع زوايا المحور ص { ٩٠ ، ٢٧٠ } ناتجها صفر

المحور ص يمثل جا لذا فإن :

- الدالة جا مع زوايا المحور ص { ٩٠ ، ٢٧٠ } ناتجها ١ أو -١ حسب موقع الزاوية فى الجزء الموجب او السالب
- الدالة جا مع زوايا المحور س { ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠} ناتجها صفر

الدالة ظا

الدالة ظا مع الزاويتين ٩٠ ، ٢٧٠ قيمتها غير معرفة

أختبر نفسك :

جتا ٩٠ = جا ٠ = قتا ١٨٠ = قا ٢٧٠ =
ظا ٩٠ = ظا ٠ = جتا ٠ = جتا ١٨٠ =
قا ٠ = قا ١٨٠ = جتا ٣٦٠ = ظا ٣٦٠ =

ثانيا الزوايا الخاصة { ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ }

درسنا فيما سبق المثلث الثلاثيني الستيني وهو مثلث قائم به زاويتان حادتان احداهما قياسها ٣٠ والاخري قياسها ٦٠ كما درسنا النتائج الاتية

☺ الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = $\frac{1}{2}$ الوتر

☹ الضلع المقابل للزاوية ٦٠ = $\frac{1}{2}$ الوتر × $\sqrt{3}$

مثال : ٍ ب هـ Δ قائم الزاوية فى ب ،
ق(∠ ٍ) = ٣٠°، ق(∠ هـ) = ٦٠°
وكان ٍ هـ = ٢ سم أوجد ٍ ب ، ب هـ
وكذلك جميع الدوال المثلثية للزاويتين ٍ ، هـ

الحل

☹ ب هـ = $\frac{1}{2}$ × ٢ = ١ سم

☹ ٍ ب = $\frac{1}{2}$ × ٢ × $\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$

الدوال المثلثية للزاوية ٣٠

☺ جا ٍ = جا ٣٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{1}{2}$

☺ جتا ٍ = جتا ٣٠ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\quad}{2}$

☺ ظا ٍ = ظا ٣٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

الدوال المثلثية للزاوية ٦٠

☺ جا هـ = جا ٦٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\quad}{2}$

☺ جتا هـ = جتا ٦٠ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\quad}{2}$

☺ ظا هـ = ظا ٦٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{1}$

وبالتمعن فى المثلث القائم المتساوي الساقين نجد ان وتر هذا المثلث = $\sqrt{2}$ احد الساقين

مثال : ٍ ب هـ Δ قائم الزاوية فى ب ،
ٍ ب = ب هـ وكان ٍ ب = ١ سم أوجد ٍ هـ
وكذلك جميع الدوال المثلثية للزاويتين ٍ ، هـ

الحل

ٍ ب = ب هـ = ١ سم
∴ ق(∠ ٍ) = ق(∠هـ) = ٤٥°
ٍ هـ = $\sqrt{1^2 + 1^2}$ = $\sqrt{2}$

الدوال المثلثية للزاوية ٤٥

☺ جا ٍ = جا ٤٥ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ =

☺ جتا ٍ = جتا ٤٥ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ =

☺ ظا ٍ = ظا ٤٥ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{1}{1}$ = ١

الزاوية هـ لها نفس قيم ∠ ٍ لانهما متساويتان

لذا نجمع النسب المثلثية للزوايا الخاصة فى هذا الجدول

	٣٠	٦٠	٤٥
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\quad}{2}$	
جتا	$\frac{\quad}{2}$	$\frac{1}{2}$	
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{1}$	١

مثال ١ : أوجد قيم جميع الزوايا المثلثية للزوايا الاتية :

(١) ٣٠ (٢) ٤٥ (٣) ٦٠ (٤) صفر
(٥) ٩٠ (٦) ١٨٠ (٧) ٢ π (٨) $\frac{3\pi}{2}$

الحل

(١) الزاوية ٣٠

جا ٣٠ = $\frac{1}{2}$ جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ظا ٣٠ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

قتا ٣٠ = قا ٣٠ = ظتا ٣٠ =

(٢) **الزاوية ٤٥**

جا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جتا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ظا ٤٥ = ١

قتا ٤٥ =   قا ٤٥ =   ظتا ٤٥ =

(٣) **الزاوية ٦٠ بنفسك**

(٤) **الزاوية صفر**

جا ٠ = ٠   جتا ٠ = ١   ظا ٠ = ٠

قتا ٠ = غير معرف   قا ٠ = ١   ظتا ٠ = غير معرف

(٥) **الزاوية ٩٠**

جا ٩٠ = ١   جتا ٩٠ = ٠   ظا ٩٠ = غير معرف

قتا ٩٠ = ١   قا ٩٠ = غير معرف   ظتا ٩٠ = ٠

باقى الزوايا بنفسك

مثال ٢ : أوجد قيمة ما يأتى :

(١) جتا ٠ + جتا ٩٠ + جتا ١٨٠ + جتا ٢٧٠ + جتا ٣٦٠

(٢) ظا² ٦٠ – قا² ٦٠ + جا ٩٠

(٣) قا $\frac{\pi}{6}$ ظا $\frac{\pi}{3}$ - ظتا $\frac{\pi}{3}$ جتا $\frac{\pi}{6}$

(٤) ٢ جا ٣٠ جتا ٦٠ + $\sqrt{2}$ جا ٤٥ جا ٩٠

(٥) جتا ٩٠ قتا ٣٠ + قا² ٤٥ جا ٣٠ – جتا ٢٧٠ جا ١٨٠

(٦) ٤ جا ٣٠ جا ٩٠ – جتا ٠ قا ٦٠ + ٥ ظا ٤٥ + ١٠ جتا² ٤٥ جا ٢٧٠ - ظا ٣٠ جا ١٨٠

الحل

(١) جتا ٠ + جتا ٩٠ + جتا ١٨٠ + جتا ٢٧٠ + جتا ٣٦٠

= ١ + ٠ + (-١) + ٠ + ١ = ١

(٢) ظا² ٦٠ – قا² ٦٠ + جا ٩٠

= $(\sqrt{3})^2$ – (٢)² + ١ = ٣ – ٤ + ١ = صفر

(٣) قا $\frac{\pi}{6}$ ظا $\frac{\pi}{3}$ - ظتا $\frac{\pi}{3}$ جتا $\frac{\pi}{6}$

= قا ٣٠ ظا ٦٠ – ظتا ٦٠ جتا ٣٠

= $\frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٢ - $\frac{1}{2}$ = $\frac{4-1}{2}$ = $\frac{3}{2}$

(٤) ٢ جا ٣٠ جتا ٦٠ + $\sqrt{2}$ جا ٤٥ جا ٩٠

= ٢ × $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ + $\sqrt{2}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ × ١

= $\frac{1}{2}$ + ١ = $\frac{3}{2}$

(٥) جتا ٩٠ قتا ٣٠ + قا² ٤٥ جا ٣٠ – جتا ٢٧٠ جا ١٨٠

= ٠ × ٢ + $(\sqrt{2})^2$ × $\frac{1}{2}$ - ٠ × ٠

= ٠ + ٢ × $\frac{1}{2}$ + ٠ = ١

(٦) **تدريب**

٤ جا ٣٠ جا ٩٠ – جتا ٠ قا ٦٠ + ٥ ظا ٤٥

+ ١٠ جتا² ٤٥ جا ٢٧٠ - ظا ٣٠ جا ١٨٠

مثال ٣ : أثبت صحة المتطابقات الاتية

(١) ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٤٥ = ١

(٢) قا ٣٠ ظا ٦٠ + قتا² ٦٠ - ظا² ٤٥ = $\frac{7}{3}$

(٣) جا(٦٠ – ٣٠) – جتا ٦٠ + جتا² ٤٥ = $\frac{1}{2}$

(٤) ٢ جتا² $\frac{\pi}{3}$ + ٣ جا² $\frac{\pi}{4}$ + ٤ ظا² $\frac{\pi}{3}$ - ٤ جا $\frac{\pi}{2}$ = ١٠

(٥) جتا² ٣٠ ظتا² ٦٠ ظا ٤٥ = $\frac{1}{4}$

(٦) قتا² ٣٠ - ظا² ٦٠ – جا ٢٧٠ = قا² ٤٥ جتا ١٨٠ جا ٢٧٠

الحل

(١) ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٤٥ = ١

الايمن = ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٤٥

= ٢ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ × ١

= ٢ × $\frac{1}{2}$ = ١ = الايسر

(٢) ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٤٥ = ١

الايمن = قا ٣٠ ظا ٦٠ + قتا² ٦٠ - ظا² ٤٥

= $\frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2$

= ٢ + $\frac{4}{3}$ - ١ = ١ + $\frac{4}{3}$

= ١ + $\frac{4}{3}$ = $\frac{3+4}{3}$ = $\frac{7}{3}$ = الايسر

(٣) قا ٣٠ ظا ٦٠ + قتا² ٦٠ - ظا² ٤٥ = $\frac{7}{3}$

الايمن = جا(٦٠ – ٣٠) – جتا ٦٠ + جتا² ٤٥ =

= جا ٣٠ - جتا ٦٠ + جتا² ٤٥

= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ + $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ = $\frac{1}{2}$ = **الايسر**

(٤) ٢ جتا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$ + ٣ جا$^{٢}\frac{\pi}{٤}$ + ٤ ظا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$ - ٤ جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١٠

الايمن = ٢ جتا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$ + ٣ جا$^{٢}\frac{\pi}{٤}$ + ٤ ظا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$ - ٤ جا $\frac{\pi}{٢}$

= ٢ جتا^{٢} ٦٠ + ٣ جا^{٢} ٤٥ + ٤ ظا^{٢} ٦٠ – ٤ جا ٩٠

= $٢\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + ٣\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} + ٤\left(\sqrt{٣}\right)^{٢} - ٤ \times ١$

= $٢ \times \frac{١}{٤} + ٣ \times \frac{١}{٢} + ٤ \times ٣ - ٤ = \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} + ١٢ - ٤$

= $\frac{١+٣}{٢} + ٨ = \frac{٤}{٢} + ٨ = ٢ + ٨ = ١٠$ = **الايسر**

(٥) جتا^{٢} ٣٠ ظتا^{٢} ٦٠ ظا ٤٥ = $\frac{١}{٤}$

الايمن = جتا^{٢} ٣٠ ظتا^{٢} ٦٠ ظا ٤٥

= $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢} \times ١$

= $\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣} \times ١ = \frac{١}{٤}$ = **الايسر**

(٦) قتا^{٢} ٣٠ - ظا^{٢} ٦٠ – جا ٢٧٠
= قا^{٢} ٤٥ جتا ١٨٠ جا ٢٧٠

الايمن :

قتا^{٢} ٣٠ - ظا^{٢} ٦٠ – جا ٢٧٠

= $(٢)^{٢} - \left(\sqrt{٣}\right)^{٢} - (-١)$

= $٤ - ٣ + ١ = ٤ - ٢ = ٢$

الايسر :

قا^{٢} ٤٥ جتا ١٨٠ جا ٢٧٠ = $\left(\sqrt{٢}\right)^{٢} \times -١ \times -١ = ٢$

يساوى الايسر

تدريبات

(١) ٢ جتا^{٢} ٤٥ – ١ = ١ – ٢ جا^{٢} ٤٥

(٢) ظا ٦٠ = $\frac{٢ظا٣٠}{١-ظا^{٢}٣٠}$

(٣) جا ٦٠ = ٢ جا ٣٠ جتا ٣٠

مثال ٤ : أوجد قيمة س التى تحقق :

(١) س جا$^{٢}\frac{\pi}{٤}$ جتا π = ظا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$ جا $\frac{٣\pi}{٢}$

الحل

س جا$^{٢}\frac{\pi}{٤}$ جتا π = ظا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$ جا $\frac{٣\pi}{٢}$

س × جا^{٢} ٤٥ × جتا ١٨٠ = ظا^{٢} ٦٠ × جا ٢٧٠

س × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ × -١ = $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}$ × -١

⟸ س × $\frac{١}{٢}$ = ٣ ∴ س = $٣ \times ٢ = ٦$

تدريب

(٢) س جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$ = ظا$^{٢}\frac{\pi}{٤}$ - جتا $\frac{٣\pi}{٢}$

مثال ٥ : إذا كانت س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] أوجد قيمة س التى تحقق ما يلى :

(١) جا س = جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ جا ٦٠

(٢) ٣ ظا^{٢} س = ٤ جا$^{٢}\frac{\pi}{٦}$ + ٨ جتا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$

(٣) جتا س = $\frac{جا٦٠}{جا٩٠}$ - $\frac{جا٠}{جا٤٥}$

الحل

(١) جا س = جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ جا ٦٠

= $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= $\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$

∴ جا س = ١ ⟸ س = $°٩٠$

بعض خواص الدوال المثلثية

الدوال المثلثية لها خواص تميزها عن باقى الدوال المسترسلة فلها خواص مشتركة وكل دالة لها خواص منفردة وبعض هذه الخواص نسردها فيما يلى

(١) الدوال المثلثية جميعها دوال دورية ودورتها ٢π

الدالة تكون دورية إذا كانت ء(س) = ء(س + هـ)
وتكون دورتها = هـ ولذلك فإن الدوال المثلثية دوال دوريه لأن على سبيل المثال يكون جا θ = جا $(\theta + 2\pi)$
لذا فإن الدوال المثلثية جميعها دوال دورية ودورتها ٢ π

(٢) مدى الدالتين جا θ ، جتا θ = [-١ ، ١]

أى انه بالنسبة للدالتين جا ، جتا لا يمكن أن تتعدى قيمة كلا منهما عن ١ ولا يمكن أن تقل عن -١ أما باقى الدوال المثلثية فلا ينطبق عليها ذلك

(٣) الزوايا السالبة للدوال جا ، جتا ، ظا

من خصائص هذه الدوال التى سنتعرف عليها فى هذا الدرس أن

- جا $(-\theta)$ = - جا θ ⟸ جا - ٣٠ = - جا ٣٠
- جتا$(-\theta)$ = جتا θ ⟸ جتا (- ٣٠٠) = جتا ٣٠٠
- ظا $(-\theta)$ = - ظا θ ⟸ ظا - ٣٠ = - ظا ٣٠

(٤) الدالة العكسية للدالة المثلثية

إذا كان جا θ = م ⟸ θ = جا$^{-1}$ م

ومعنى ذلك انه وبإعتبار θ الزاوية محل الدراسة وأن م قيمة جيب هذه الزاوية
فإن مهمة الدالة المثلثية جا مع الزاوية θ هو إيجاد القيمة م
أى أن إذا علمنا زاوية معينة فإننا نستطيع أن نوجد قيمة جيبها او جيب تمامها أو ظلها فماذا إذا علمنا قيمة جيب زاوية غير معلومة فهل نستطيع إيجاد هذه الزاوية
ولكى نستطيع ان نوجد هذه الزاوية لا بد ان يكون لدينا دالة مثلثية عكسية للجيب والتى تكون جا$^{-1}$
فمثلا :

إذا كانت جا θ = $\frac{1}{2}$ ⟸ θ = جا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ = ٣٠

الزوايا المنتسبة

قبل ان نتعرف على الزوايا المنتسبة نراجع سويا
الزوايا المحورية هى { ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠ }
الزوايا الخاصة هى { ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ }

الزوايا المنتسبة

هى تلك الزوايا التى تنتج من جمع او طرح زاوية محورية وزاوية خاصة

اى تكون كالتالى

١٢٠ = ٩٠ + ٣٠ أو = ١٨٠ - ٦٠
٢٤٠ = ١٨٠ + ٦٠ أو = ٢٧٠ - ٣٠
٣١٥ = ٣٦٠ - ٤٥ أو = ٢٧٠ + ٤٥

وهكذا وإذا استخدمنا جميع الزوايا المحورية بالاضافة او بالطرح منها مع جميع الدوال الخاصة سينتج ما يسمى بالزوايا المنتسبة

نتسائل الان ؟

هل يمكن تحديد قيمة مثلا لـ جا ١٢٠ وما علاقتها بالقيمة جا ٣٠ أو جا ٦٠ حيث أن
١٢٠ = ١٨٠ - ٦٠ = ٩٠ + ٣٠
كل ذلك سنتعرف عليه فيما يلى :

خطوات إيجاد قيمة الزوايا المنتسبة

(١) زوايا المحور ص { ٩٠ ، ٢٧٠ } تغير الدوال المثلثية

جا ⟸ جتا ، جتا ⟸ جا
قا ⟸ قتا ، قتا ⟸ قا
ظا ⟸ ظتا ، ظتا ⟸ ظا

أما زوايا المحور س { ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ } فلا تغير الدوال المثلثية

(٢) كل ما تفعله الزاويتين ٩٠ ، ٢٧٠ انها تغير الدالة المثلثية كما سبق ولكن تبقى على الزاوية θ كما هى ولكن الاشارة للقيمة الجديدة حسب إشارة الدالة بموقع الزاوية كالتالى :

- جا (٩٠ + θ) = جتا θ

تغيرت إلى جتا لأن ٩٠ زاوية تغير الدالة المثلثية وإشارتها موجبة لأن ٩٠ + θ زاوية فى الربع الثانى و جا فى الربع الثانى موجبة

- ظا (٣٦٠ - θ) = - ظا θ

الدالة بقيت ظا كما هى لأن ٣٦٠ زاوية سينية لا تغير الدالة المثلثية ولكن الاشارة تغيرت لأن الزاوية ٣٦٠ - θ زاوية فى الربع الرابع و ظا فى الربع الرابع سالبة وهكذا مع اى زاوية واى دالة مثلثية

أمثلة توضيحية

(١) جا(٩٠ + θ)

الزاوية ٩٠ + θ تقع فى الربع الثانى وجا فى الربع الثانى موجبة

٩٠ تغير الداة المثلثية جا ⟸ جتا

∴ جا(٩٠+θ) = جتا θ

(٢) جتا(١٨٠+θ)

الزاوية ١٨٠+θ تقع فى الربع الثالث

وجتا فى الربع الثالث سالبة

١٨٠ لا تغير الدوال المثلثية

∴ جتا(١٨٠+θ) = - جتا θ

(٣) قتا(٢٧٠ − θ)

الزاوية ٢٧٠ − θ تقع فى الربع الثالث

وقتا فى الثالث سالبة

٢٧٠ تغير الدالة المثلثية قتا ⟸ قا

∴ قتا(٢٧٠-θ) = - قا θ

(٤) جا(-θ) = جا(٣٦٠ − θ)

الزاوية −θ أو ٣٦٠ −θ تقع فى الربع الرابع

و جا فى الربع الرابع سالبة

٣٦٠ أو ٠ لا تغير الدوال المثلثية

∴ جا(-θ) = جا(٣٦٠ − θ) = - جا θ

(٥) ظا(- ٩٠ + θ)

ظا(- ٩٠ + θ) = ظا (- ٩٠ + θ + ٣٦٠) = ظا(٢٧٠ + θ)

الزاوية ٢٧٠ + θ فى الربع الرابع وظا فيه سالبة

٢٧٠ تغير الدوال المثلثية

∴ ظا(- ٩٠ + θ) = ظا(٢٧٠ + θ) = - ظتا θ

طريقة أخرى:

ظا(- ٩٠ + θ) = ظا{- (٩٠ − θ)}

= - ظا(٩٠ - θ) = - ظتا θ

مثال ١ : أوجد قيمة كلا مما يأتى

(١) جا٢٤٠ (٢) جتا ٥٧٠ (٣) ظا (-١٥٠)

(٤) جتا $\frac{5\pi}{3}$ (٥) قا $\frac{15\pi}{4}$ (٦) ظا $\frac{14\pi}{3}$

الحل

(١) جا ٢٤٠

اولا نحدد موقع الزاوية ٢٤٠ وهى فى الربع الثالث

∴ ٢٤٠ = ١٨٠ + ٦٠ أ، ٢٤٠ = ٢٧٠ − ٣٠

∴ جا ٢٤٠ = جا (١٨٠ + ٦٠) = - جا ٦٠ = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ جا ٢٤٠ = جا(٢٧٠ - ٣٠) = - جتا ٣٠ = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٢) جتا ٥٧٠

الزاوية اكبر من ٣٦٠

∴ θ = ٥٧٠ − ٣٦٠ = ٢١٠

الزاوية تقع فى الربع الثالث

∴ ٢١٠ = ١٨٠ + ٣٠ أ، ٢١٠ = ٢٧٠ − ٦٠

∴ جتا ٢١٠ = جتا(١٨٠+ ٣٠) = - جتا ٣٠ = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ جتا٢١٠ = جتا (٢٧٠ - ٦٠) = - جا ٦٠ = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٣) ظا(- ١٥٠)

= ظا (- ١٥٠ +٣٦٠) = ظا ٢١٠

∴ ٢١٠ = ١٨٠ + ٣٠ أ، ٢١٠ = ٢٧٠ − ٦٠

∴ ظا٢١٠ = ظا (١٨٠+٣٠) =

∴ ظا ٢١٠ = ظا (٢٧٠-٦٠) =

(٤) جتا $\frac{5\pi}{3}$

⟸ θ = $\frac{5\times180}{3}$ = ٣٠٠

٣٠٠ تقع فى الربع الرابع

∴ ٣٠٠ = ٣٦٠ − ٦٠ أ، ٣٠٠ = ٢٧٠ + ٣٠

∴ جتا ٣٠٠ = جتا(٣٦٠ - ٦٠) =

∴ جتا ٣٠٠ = جتا(٢٧٠ + ٣٠) =

(٥) ، (٦) تدريب

مثال ٢ : إذا كانت θ قياس زاوية حادة موجبة فى وضع قياسى وتتعين على دائرة الوحدة النقطة ب($\frac{3}{5}$ ، ص) : أوجد قيمة :

(١) ظا(٩٠-θ) + قا(٩٠-θ)

(٢) ظتا(٢٧٠ + θ) − ظا(٩٠+θ) − جا (١٨٠+θ)

(٣) جا(٩٠+θ) + جتا(١٨٠- θ)

الحل

لأى نقطة على دائرة الوحدة يكون

$س^٢ + ص^٢ = ١$

$(\frac{٣}{٥})^٢ + ص^٢ = ١$

$ص^٢ = ١ - \frac{٩}{٢٥} = \frac{٢٥ - ٩}{٢٥} = \frac{١٦}{٢٥}$

$ص^٢ = \frac{١٦}{٢٥} \Leftarrow ص = \sqrt{\frac{١٦}{٢٥}} = \pm \frac{٤}{٥}$

ولكن ص فى الربع الاول موجبة $\Leftarrow ص = \frac{٤}{٥}$

$\therefore$ جا $\theta = \frac{٤}{٥}$ جتا $\theta = \frac{٣}{٥}$ ظا $\theta = \frac{٤}{٣}$

(١) ظا(٩٠ - θ) + قا(٩٠ - θ) = ظتا θ + قتا θ

$= \frac{٣}{٤} + \frac{٥}{٤} = \frac{٣+٥}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢$

(٢) ظتا(٢٧٠ + θ) – ظا(٩٠ + θ) – جا (١٨٠ + θ)

= - ظا θ - (- ظا θ) – (- جا θ)

= - ظا θ + ظا θ + جا θ + جا θ = $\frac{٤}{٥}$

(٣) جا(٩٠ + θ) + جتا(١٨٠ - θ)

= جتا θ - جتا θ = صفر

مثال ٣ : إذا كان جتا θ = - $\frac{٤}{٥}$ $\forall \in$] $\frac{\pi}{٢}$ ، π [أوجد :

(١) جا(١٨٠-θ) (٢) قا(٣٦٠-θ)

(٣) جتا(-θ) (٤) ظا(θ – ١٨٠)

(٥) جتا(١٨٠+θ) – ظتا(٢٧٠+θ)

الحل

لأى نقطة على دائرة الوحدة يكون

$س^٢ + ص^٢ = ١$

$(- \frac{٤}{٥})^٢ + ص^٢ = ١$

$\frac{١٦}{٢٥} + ص^٢ = ١$

$\Leftarrow ص^٢ = ١ - \frac{١٦}{٢٥} = \frac{٢٥ - ١٦}{٢٥} = \frac{٩}{٢٥}$

$ص = \sqrt{\frac{٩}{٢٥}} = \pm \frac{٣}{٥}$

$\Leftarrow$ ص فى الربع الثانى موجبة

$\therefore ص = \frac{٣}{٥}$

$\therefore$ جا $\theta = \frac{٣}{٥}$ جتا θ = - $\frac{٤}{٥}$ ظا θ = - $\frac{٣}{٤}$

(١) جا(١٨٠ - θ) = جا θ = $\frac{٣}{٥}$

(٢) قا(٣٦٠ - θ) = قا θ = - $\frac{٥}{٤}$

(٣) جتا(- θ) = جتا θ = - $\frac{٤}{٥}$

(٤) ظا(θ– ١٨٠) = ظا (θ – ١٨٠+٣٦٠)

= ظا(١٨٠+ θ) = ظا θ = - $\frac{٣}{٤}$

(٥) جتا(١٨٠+θ) – ظتا(٢٧٠ +θ)

= - جتا θ – { - ظا θ } = - جتا θ + ظا θ

= - (- $\frac{٤}{٥}$) + (- $\frac{٣}{٤}$) = $\frac{٤}{٥}$ - $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١٦ - ١٥}{٢٠}$ = $\frac{١}{٢٠}$

مثال ٤ : أوجد قيمة

(١) جتا١٢٠ + ظا٢٢٥ + قتا ٣٣٠ + جتا ٤٢٠

(٢) جتا٢١٠ جا ٥١٠ – جا٣٣٠ جتا(- ٣٣٠)

الحل

(١) نوجد كل نسبة على حداها

جتا١٢٠ = جتا(١٨٠- ٦٠) = - جتا ٦٠ = - $\frac{١}{٢}$

ظا٢٢٥ = ظا(١٨٠ + ٤٥)= ظا ٤٥ = ١

قتا ٣٣٠ = قتا(٣٦٠ – ٣٠) = - قتا ٣٠ = - ٢

جتا ٤٢٠ = جتا(٤٢٠ – ٣٦٠) = جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ جتا١٢٠ + ظا٢٢٥ + قتا٣٣٠ + جتا ٤٢٠ =

- $\frac{١}{٢}$ + ١ + (-٢) + $\frac{١}{٢}$ = ١ – ٢ = - ١

(٢) جتا٢١٠ جا ٥١٠ – جا٣٣٠ جتا(- ٣٣٠)

جتا ٢١٠ = جتا(١٨٠ +٣٠)= - جتا ٣٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا٥١٠ = جا(٥١٠- ٣٦٠)= جا ١٥٠

= جا(١٨٠ -٣٠) = جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

جا٣٣٠ = جا(٣٦٠ – ٣٠) = - جا ٣٠ = - $\frac{١}{٢}$

جتا(- ٣٣٠) = جتا ٣٣٠

= جتا(٣٦٠ - ٣٠) = جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ جتا٢١٠ جا ٥١٠ – جا٣٣٠ جتا(- ٣٣٠)

= - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + (- $\frac{١}{٢}$) × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{4}$

$= -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

قاعدة مهمة :

(١) إذا كان أ ، ب زاويتين متتامتين فإن :
جا أ = جتا ب ، ظا أ = ظتا ب ، قتا أ = قا ب

(٢) إذا كان جا أ = جتا ب فإن :
⟸ أ ± ب = $\frac{\pi}{2} + 2$ ن π ∀ ن ∈ ص

(٣) إذا كان قتا أ = قا ب فإن :
⟸ أ ± ب = $\frac{\pi}{2} + 2$ ن π ∀ ن ∈ ص

(٤) إذا كان ظا أ = ظتا ب فإن :
⟸ أ ± ب = $\frac{\pi}{2} +$ ن π ∀ ن ∈ ص

∀ أ ≠ (ن + $\frac{1}{2}$) π ، ب ≠ ن π

مثال ٥ : أوجد الحل العام لكلا من المعادلات الاتية

(١) جا ٥θ = جتا ٤θ (٢) ظا ٢θ = ظتا ٣θ

(٣) قا (٢θ – ١) = قتا (٣θ + ١)

الحل

(١) جا ٥θ = جتا ٤θ

٥θ ± ٤θ = $\frac{\pi}{2} + 2$ ن π

٥θ+٤θ = $\frac{\pi}{2}$ +٢ ن π ٥θ - ٤θ = $\frac{\pi}{2}$ +٢ ن π

٩θ = $\frac{\pi}{2}$ +٢ ن π θ = $\frac{\pi}{2}$ +٢ ن π

θ = $\frac{\pi}{18}$ + $\frac{2 ن \pi}{9}$

الحل العام = { $\frac{\pi}{18}$ + $\frac{2 ن \pi}{9}$ ، $\frac{\pi}{2}$ +٢ ن π }

(١) ظا ٢θ = ظتا ٣θ

٣ θ ± ٢θ = $\frac{\pi}{2}$ + ن π

٣θ+٢θ = $\frac{\pi}{2}$ + ن π ٣θ - ٢θ = $\frac{\pi}{2}$ + ن π

٥θ = $\frac{\pi}{2}$ + ن π θ = $\frac{\pi}{2}$ + ن π

θ = $\frac{\pi}{10}$ + $\frac{ن \pi}{5}$

الحل العام = { $\frac{\pi}{18}$ + $\frac{2 ن \pi}{9}$ ، $\frac{\pi}{2}$ +٢ ن π }

مثال ٥ : أوجد قيم س التى تحقق ما يأتى :

(١) قتا(س + ٢٥) = قا(٢ س - ١٠) ∀ ٠ < س ≤ ٩٠

(٢) ظا(٩٠ + س) = ظتا(س - ٣٠) ∀ ٠ < س ≤ ١٨٠

(٣) جا($\frac{س - ٢٠}{٢}$) = جتا ($\frac{س + ٢٠}{٢}$) ∀ ٠ < س ≤ ٩٠

الحل

(١)

⟸ قتا(س + ٢٥) = قا(٢ س - ١٠)

∴ (س + ٢٥)±(٢ س -١٠) = ٩٠ + ٢ ن π

حاصل الجمع :

(س + ٢٥)+(٢ س - ١٠) = ٩٠ + ٢ ن π

٣س + ١٥ = ٩٠ + ٢ ن π

عندما ن = ٠ ⟸ ٣س +١٥=٩٠ ⟸ ٣س=٩٠ - ١٥

٣ س = ٧٥ ∴ س = ٢٥ ——— (١)

عندما ن =١ ⟸ ٣س + ١٥ = ٩٠ + ١٨٠ = ٢٧٠

٣س = ٢٧٠ – ١٥= ٢٥٥

٣ س = ٢٥٥ ∴ س = ٨٥ ——— (٢)

عندما ن = ٢ ⟸ ٣س + ١٥ = ٩٠ + ٣٦٠ = ٤٥٠

٣س = ٤٥٠ – ١٥ = ٤٣٥

٣س = ٤٣٥ ∴ س = $\frac{٤٣٥}{٣}$ = ١٤٥° ولكنها مرفوضة

لأنها لا تحقق الشروط حيث ٠ < س ≤ ٩٠

حاصل الطرح

(س + ٢٥) -(٢ س -١٠) = ٩٠ + ٢ ن π

س + ٢٥ – ٢س + ١٠ =٩٠ + ٢ ن π

- س + ٣٥ = ٩٠ + ٢ ن π

عندما ن = ٠ ⟸ - س + ٣٥ = ٩٠

- س = ٩٠ – ٣٥ = ٥٥ ⟸ س = - ٥٥

مرفوضة لأنها لا تحقق الشرط حيث ٠ < س ≤ ٩٠

∴ م.ح = { ٢٥ ، ٨٥ }

(٢) ظا(٩٠ + س)=ظتا(س - ٣٠) ∀ ٠ < س ≤ ١٨٠

(٩٠+س) ±(س-٣٠) = ٩٠ + ن π

حاصل الجمع :

(س+٩٠) + (س - ٣٠) = ٩٠ + ن π

٢ س + ٦٠ = ٩٠ + ن π

عندما ن = ٠ ⟸ ٢س + ٦٠ = ٩٠

٢ س = ٩٠ - ٦٠ = ٣٠

٢س = ٣٠ ∴ س = ١٥ ——— (١)

عندما ن = ١ ⟸ ٢س + ٦٠ = ٩٠ + ١٨٠

٢س + ٦٠ = ٢٧٠ ⟸ ٢ س = ٢٧٠ – ٦٠

٢س = ٢١٠ ∴ س = ١٠٥ ——— (٢)

عندما ن = ٢ ⟸ ٢س + ٦٠ = ٩٠ + ٣٦٠

٢س +٦٠ = ٤٥٠ ⟸ ٢س = ٤٥٠ – ٦٠ = ٣١٠

∴ ٢ س = ٣١٠ ∴ س = ١٥٥ —— (٣)

عندما ن = ٣ ⟸ ٢س + ٦٠ = ٩٠ + ٥٤٠

٢س + ٦٠ = ٦٣٠ ⟸ ٢ س = ٦٣٠ - ٦٠ = ٥٧٠

٢ س = ٥٧٠ ∴ س = ٢٨٥

ولكنها لا تحقق الشروط حيث ٠ < س ≤ ١٨٠

حاصل الجمع :

٩٠ + س – س + ٣٠ = ٩٠ + ن π

١٢٠ = ٩٠ + ن π وهذا غير صحيح رياضيا

∴م.ح = { ١٥ ، ١٠٥ ، ١٥٥ }

حل المعادلات المثلثية

إذا كانت جا θ = $\frac{١}{٢}$ فإن يتطرق فى أذهاننا مباشرة أن

θ = ٣٠

بالرغم من أن جا ١٥٠ = $\frac{١}{٢}$ أيضا ولكننا نحبذ التعامل دائما مع الزاوية الحادة

لذا فإنه عندما تكون جا θ = $\frac{١}{٢}$ ⟸ θ = ٣٠ أ، ١٥٠

كيفية جاءت الزاوية ١٥٠ :

جا دالة مثلثية موجبة فى الربع الاول والثانى والزوايا المحورية على المحور س هى ٠ ، ١٨٠

والزاوية الاساسية التى تجعل جا θ = $\frac{١}{٢}$ هى θ = ٣٠

فيكون الحل العام للمعادلة

θ = ٠ + ٣٠ = ٣٠ **لأن جا موجبة فى الربع الاول**

θ = ١٨٠ – ٣٠ = ١٥٠ **لأن جا موجبة فى الربع الثانى**

خطوات حل المعادلة المثلثية :

(١) اولا يجب أن تكون الدالة فى الصورة

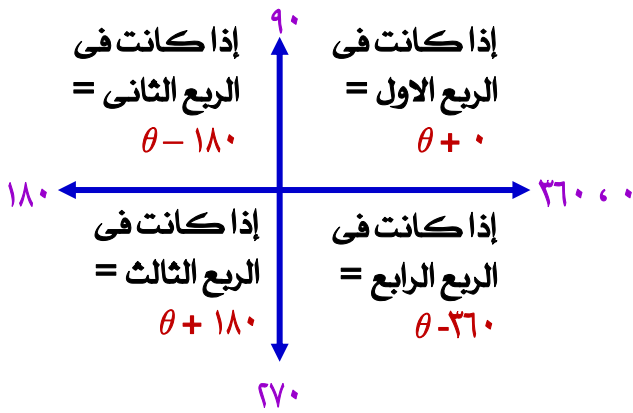
جا θ = م أو جتا θ = م أو ظا θ = م

وإذا لم تكون فى هذه الصورة فإنه يجب تحويلها لها

(٢) تحديد الربعين اللذين تقع فيهما الدالة المثلثية عن طريق قاعدة الاشارات

(٣) نوجد الزاوية الحادة التى تحقق النسبة المثلثية

(٤) نستخدم الزوايا ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ ولا نستخدم الزوايا ٩٠ ، ٢٧٠ لأنها تغير الدوال المثلثية

ويراعى الاتى فى حل المعادلة :

إذا كانت فى الربع الثانى =	٩٠	إذا كانت فى الربع الاول =
١٨٠ – θ		٠ + θ
١٨٠		٠ ، ٣٦٠
إذا كانت فى الربع الثالث =		إذا كانت فى الربع الرابع =
١٨٠ + θ	٢٧٠	٣٦٠- θ

مثال ٦ : إذا كانت ظا θ = ١ أوجد قيم θ الممكنة حيث θ ∈]٠ ، ٢π[

الحل

ظا θ = ١ ظا موجبة فى الربع الاول والثالث

θ الحادة = ظا$^{-1}$ ١ = ٤٥

عندما تكون فى الربع الاول θ = ٠ + ٤٥ = ٤٥

عنما تكون فى الرع الثالث θ = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥

مثال ٧ : أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية الاتية

(١) ٤ جتا^{٢} س – ٣ = ٠ ∀ س ∈ [٠ ، ٢π]

(٢) ظا^{٣}س - $\frac{١}{ظتا س}$ = ٠ ∀ س ∈ [٠ ، ٢π]

(٣) ٢جا^{٢} س – جاس – ١ = ٠ ∀ س ∈ [٠ ، ٢π]

(٤) ٢ جاس + √٣ = ٠ ، ٢ جتاس = ١ ، س ∈ [٠ ، ٢π]

٥) قاس + ٢ جتاس = ٣

الحل

(١) ٤ جتا^{٢} س – ٣ = ٠ ⟸ ٤جتا^{٢} س = ٣

جتا^٢^ س = $\frac{٣}{٤}$ ⟸ جتا س = $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

نفرض أن θ زاوية حادة وان جتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ θ = جتا^-١^ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٦٠

ولكن :

جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ > ٠ موجبة

∴ س فى الربع الاول و الرابع

فى الربع الاول :

س = ٠ + ٦٠ = ٦٠

فى الربع الرابع:

س = ٣٦٠ – ٦٠ = ٣٠٠

جتا س = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ < ٠ سالبة

∴ س فى الربع الثانى و الثالث

فى الربع الثانى :

س = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠

فى الربع الثالث :

س = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠

م ح = { ٦٠ ، ١٢٠ ، ٢٤٠ ، ٣٠٠ }

(٢) ظا^٣^س - $\frac{١}{\text{ظا س}}$ = ٠

⟸ ظا^٣^ س – ظا س = ٠ ظاس (ظا^٢^ س – ١) =٠

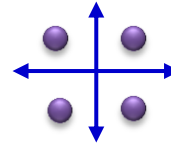
⟸ ظاس (ظا س +١) (ظا س – ١) =٠

ظا س =٠ ، ظا س = - ١ ، ظاس = ١

أولا عندما ظا س = ٠

∴ س = ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ لأنها زوايا محورية

ثانيا عندما ظاس = ±١

نفرض أن θ زاوية حادة وان ظا θ =١

∴ θ = ظا^-١^ ١ = ٤٥

ولكن :

ظا س =١ > ٠ موجبة

∴ س فى الربع الاول والثالث

فى الربع الاول :

س = ٠ + ٤٥ = ٤٥

فى الربع الثالث:

س = ١٨٠ +٤٥ =٢٢٥

ظا س = - ١ < ٠ سالبة

∴ س فى الربع الثانى والرابع

فى الربع الثانى :

س = ١٨٠ – ٤٥ =١٣٥

فى الربع الرابع :

س = ٣٦٠ -٤٥ = ٣١٥

∴ م ح = { ٤٥ ، ١٣٥ ، ٢٢٥ ، ٣١٥ }

(٣) ٢جا^٢^ س – جاس – ١ = ٠

(جا س – ١) (٢جاس + ١) = ٠

جاس = ١ جاس = - $\frac{١}{٢}$

عندما جاس = ١ :

∴ س = ٩٠ لأنها زاوية محورية

عندما جا س = - $\frac{١}{٢}$:

نفرض أن θ زاوية حادة وأن جا θ = $\frac{١}{٢}$

∴ θ = جا^-١^ $\frac{١}{٢}$ = ٣٠

ولكن جا س = - $\frac{١}{٢}$ < ٠ (سالبة)

∴ س تقع فى الربع الثالث والرابع

فى الربع الثالث :

س = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠

فى الربع الرابع

س = ٣٦٠ – ٣٠ = ٣٣٠

∴ م ح = { ٩٠ ، ٢١٠ ، ٣٣٠ }

(٥) قاس +٢ جتاس= ٣

⟸ $\frac{١}{\text{جتا س}}$ + ٢ جتا س = ٣ × جتا س

١ + ٢ جتا^٢^ س = ٣جتا س

⟸ ٢جتا^٢^س – ٣ جتاس +١ = ٠

(جتاس-١) (٢جتاس – ١) = ٠

جتا س = ١ جتا س = $\frac{١}{٢}$

عندما جتا س = ١ :

∴ س = ٠ ، ٣٦٠ لأنها زاوية محورية

عندما جتا س = $\frac{١}{٢}$:

نفرض أن θ زاوية حادة وأن جتا θ = $\frac{١}{٢}$

∴ θ = جتا^-١^ $\frac{١}{٢}$ = ٦٠

لكن جتا θ = $\frac{١}{٢}$ > ٠ موجبة

س تقع فى الربع الاول والرابع

فى الربع الاول :

س = θ = ٦٠

فى الربع الرابع :

س = ٣٦٠ – θ = ٣٦٠ – ٦٠ = ٣٠٠

م ح = { ٠ ، ٣٦٠ ، ٦٠ ، ٣٠٠ }

التمثيل البيانى للدوال المثلثية

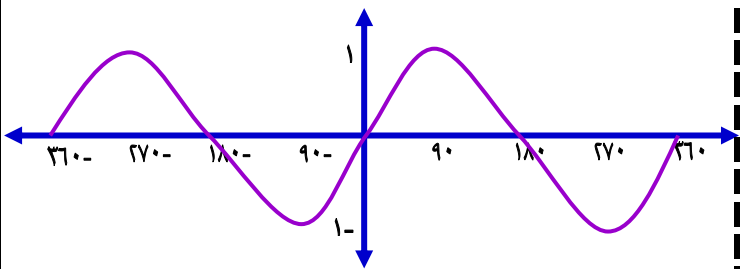
(١) اولا الدالة د(س) = جا س

لمعرفة منحنى الدالة جاس نستعرض الجدول التالى

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠	أى قيمة
د(س) = جاس	٠	١	٠	-١	٠	-١ < جاس < ١

وكذلك

س	٠	-٩٠	-١٨٠	-٢٧٠	-٣٦٠	أى قيمة
د(س)=جا س	٠	-١	٠	١	٠	-١ < جاس < ١

فيكون منحنى الدالة كالتالى :

ومن منحنى الدالة نستنتج أن :

١) مدى الدالة هو الفترة [-١ ، ١]
٢) مجال الدالة هو ح
٣) الدالة دورية ودورتها ٢π

إذا كانت الدالة على الصورة د(س) = م جا ب س

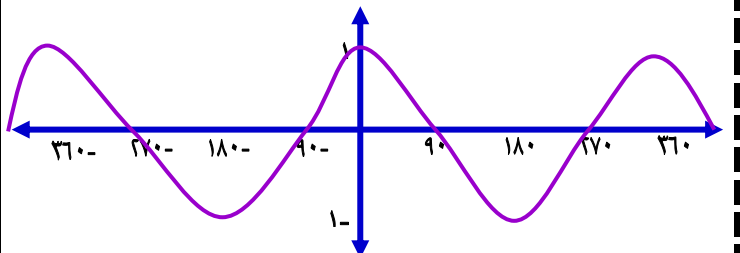
(١) مدى الدالة هو [-م ، م]
(٢) يكون المجال = ح
(٣) الدالة دورية ودورتها $\frac{2\pi}{ب}$

(٢) ثانيا الدالة د(س) = جتا س

لمعرفة منحنى الدالة جاس نستعرض الجدول التالى

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠	أى قيمة
د(س)=جتاس	١	٠	-١	٠	١	-١ < جتاس < ١

وكذلك

س	٠	-٩٠	-١٨٠	-٢٧٠	-٣٦٠	أى قيمة
د(س)=جتاس	١	٠	-١	٠	-١	-١ < جاس < ١

فيكون منحنى الدالة كالتالى :

ومن منحنى الدالة نستنتج أن :

(١) مدى الدالة هو الفترة [-١ ، ١]
(٢) مجال الدالة هو ح
(٣) الدالة دورية ودورتها ٢π

إذا كانت الدالة على الصورة د(س) = م جتا ب س

(١) مدى الدالة هو [-م ، م]
(٢) يكون المجال = ح
(٣) الدالة دورية ودورتها $\frac{2\pi}{ب}$

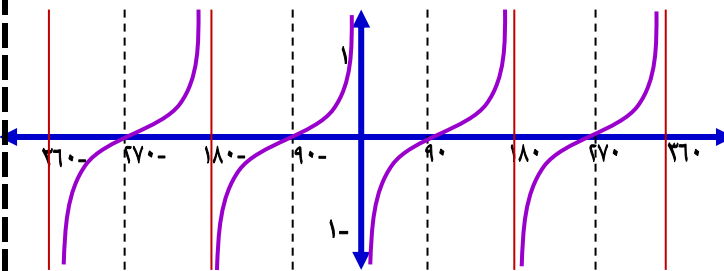
(٣) ثالثا الدالة د(س) = ظا س

لمعرفة منحنى الدالة جاس نستعرض الجدول التالى

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠
د(س)=ظاس	٠	غير معرف	٠	غير معرف	٠

وكذلك

س	٠	-٩٠	-١٨٠	-٢٧٠	-٣٦٠
د(س)=ظاس	٠	غير معرف	٠	غير معرف	٠

فيكون منحنى الدالة كالتالى :

ومن منحنى الدالة يتبين لنا

(١) مدى الدالة = ح
(٢) مجال الدالة = ح − { (ن + $\frac{1}{2}$)π }
(٣) الدالة دورية ودورتها π

إذا كانت الدالة على الصورة د(س) = م ظا ب س

(١) مدى الدالة ح
(٢) مجال الدالة = ح − { (ن + $\frac{1}{2}$) $\frac{\pi}{ب}$ }
(٣) الدالة دورية ودورتها $\frac{\pi}{ب}$

مثال ١ : عين كلا من المجال والمدى والدورة لكلا من الدوال الاتية

(١) د(س) = جاس (٢) د(س) = جتاس
(٣) د(س) = ظاس (٤) د(س) = م جا ب س
(٥) د(س) = ٣ جتا٤س (٦) د(س) = ٥ ظا٢س

الحل

(١) د(س) = جاس

المجال = ح المدى = [-١ ، ١] دورتها = ٢ π

(٢) د(س) = جتاس

المجال = ح المدى = [-١ ، ١] دورتها = ٢ π

(٣) د(س) = ظاس

المجال = ح − { (ن + $\frac{١}{٢}$) π } المدى = ح

دورتها = π

(٤) د(س) = ٢ جا ٢ س

المجال = ح المدى = [-١ ، ١] دورتها = ٢π

(٥) د(س) = ٣ جتا ٤ س

المجال = ح المدى = [-٣ ، ٣]

دورتها = $\frac{٢\pi}{٤}$ = $\frac{\pi}{٢}$

(٦) د(س) = ظا ٢ س

المجال = ح - { (ن + $\frac{١}{٢}$) $\frac{\pi}{٢}$ }

المدى = ح دورتها = $\frac{\pi}{٢}$

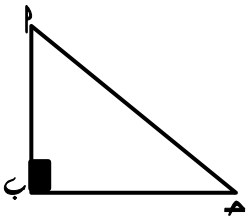
تدريب مثل بيانيا كلا من الدوال الاتية

(١) د(س) = ٢ جاس

(٢) د(س) = جتا ٢ س

(٣) د(س) = ظا ٢ س

الدوال المثلثية للزاوية الحادة

إذا كان Δ ٢ ب حـ قائم الزاوية فى ب فإن كلا من الزاويتين ٢ ، ب حادتين

الضلع ب حـ

(١) يكون مقابل للزاوية ٢

(٢) يكون مجاور للزاوية حـ

الضلع ٢ ب

(١) يكون مقابل للزاوية حـ

(٢) يكون مجاور للزاوية ٢

الضلع ٢ حـ

يمثل وتر المثلث

الدوال المثلثية :

هى دوال تربط اضلاع المثلث وزواياه وهى جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية وظل الزاوية وتسمى بالدوال الاساسية

وكذلك قاطع الزاوية وقاطع تمام الزاوية وظل تمام الزاوية وهى مقلوبات الدوال الاساسية

علاقة الدوال المثلية بالمثلث القائم

إذا كان Δ ٢ ب حـ قائم الزاوية فى ب فإن ٢ ب وترا فى المثلث ، ٢ ب ، ب حـ ضلعا القائمة ويكون

جا ٢ = $\frac{\text{المقابل لـ ٢}}{\text{وتر المثلث}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{٢ جـ}}$

جتا ٢ = $\frac{\text{المجاور لـ ٢}}{\text{وتر المثلث}}$ = $\frac{\text{٢ ب}}{\text{٢ جـ}}$

ظا ٢ = $\frac{\text{المقابل ل ٢}}{\text{المجاور ل ٢}}$

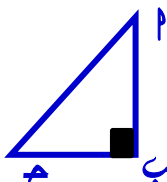
قتا ٢ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{\text{٢ جـ}}{\text{ب جـ}}$

قا ٢ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{٢ جـ}}{\text{٢ ب}}$

نص نظرية فيثاغورث رياضيا

إذا كان Δ ٢ ب حـ قائم الزاوية فى ب

أى أن ق(ب̂) = ٩٠ فإن :

$(٢ حـ)^٢ = (٢ ب)^٢ + (ب حـ)^٢$

ملاحظات مهمة

☹ إذا علم الوتر فإننا نربع الضلعين الأخرين ونطرحهما ونأتى بالجذر

☺ إذا غاب الوتر فإننا نربع الضلعين الأخرين ونجمعهما ونأتى بالجذر

مثال ١ : أ ب جـ Δ فيه

ق(∠ب) = ٩٠ ، ب أ = ١٢سم

، ب جـ = ٥ سم

أوجد : أ جـ

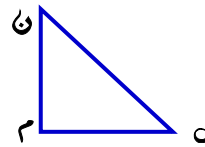
الحل

من فيثاغورث :

$(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$

$\text{أ جـ} = \sqrt{١٢^{٢} + ٥^{٢}} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

مثال٢ : ل م ن Δ قائم الزاوية فى م وكان

ل م = ٣ سم ، ل ن = ٥ سم اوجد مساحة المربع المنشأ على الضلع م ن

الحل

من فيثاغورث

$(\text{ل ن})^{٢} = (\text{ل م})^{٢} + (\text{م ن})^{٢}$

$\text{م ن} = \sqrt{٥^{٢} - ٣^{٢}} = \sqrt{٢٥ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$

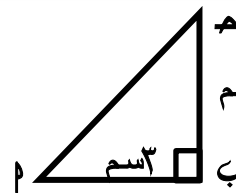
مثال ٣

أ ب جـ Δ فيه أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، ق(∠ب) = ٩٠° أوجد

(١) طول أ جـ

(٢) الدوال المثلثية للزاوية أ

(٣) الدوال المثلثية للزاوية جـ

الحل

فى المثلث المقابل

وباستخدام نظرية فيثاغورث

$(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$

$\text{أ جـ} = \sqrt{٤^{٢} + ٣^{٢}} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

(٢) $\text{جا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$ ، $\text{جتا أ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{ظا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٤}{٣}$

(٣) $\text{جا جـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{جتا جـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$ ، $\text{ظا جـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤}$

مثال ٤ : إذا كان ٣ قتا θ − ٥ = ٠

حيث ٠ < θ < ٩٠ أوجد : قا θ - ظا θ

الحل

٣ قتا θ − ٥ = ٠ ⟸ ٣ قتا θ = ٥

∴ قتا $\theta = \frac{٥}{٣}$ ⟸ جا $\theta = \frac{٣}{٥}$

من فيثاغورث :

$(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$

$\text{ب جـ} = \sqrt{٥^{٢} - ٣^{٢}} = \sqrt{٢٥ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$

∴ قا θ − ظا θ $= \frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٤} = \frac{٥ - ٣}{٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

مثال ٤ : أ ب جـ Δ فيه : أ ب = أ جـ = ١٠ سم

ب جـ = ١٢ سم رسم أ ء ⊥ ب جـ يقطعها فى ء :

أوجد

(١) جا ب + جتا جـ (٢) ظا(جـ أ ء)

(٣) بين أن جاجـ + جتاجـ > ١ ثم أوجد قيمة جا²جـ + جتا²جـ

(٤) أوجد قيمة ظا²ب + ١ ، قا²ب ماذا تلاحظ ؟

الحل

∵ أ ء ⊥ ب جـ ، أ ب = أ جـ

∴ ب ء = ء جـ = ٦ سم

من فيثاغورث على الـ Δ أ ء جـ

$(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أ ء})^{٢} + (\text{ء جـ})^{٢}$

$\text{أ ء} = \sqrt{١٠^{٢} - ٦^{٢}} = \sqrt{١٠٠ - ٣٦} = \sqrt{٦٤} = ٨$ سم

(١) جا ب + جتا جـ $= \frac{٨}{١٠} + \frac{٦}{١٠} = ٠,٨ + ٠,٦ = ١,٢$

(٢) ظا(جـ أ ء) $= \frac{٦}{٨} = ٠,٧٥$

(٣) جاجـ + جتاجـ $= \frac{٨}{١٠} + \frac{٦}{١٠} = ٠,٨ + ٠,٦ = ١,٢ > ٠$

قيمة : جا²جـ + جتا²جـ $= (\frac{٨}{١٠})^{٢} + (\frac{٦}{١٠})^{٢} = \frac{٦٤}{١٠٠} + \frac{٣٦}{١٠٠}$

$= \frac{٦٤ + ٣٦}{١٠٠} = \frac{١٠٠}{١٠٠} = ١$

(٤) ظا²ب + ١ $= (\frac{٨}{٦})^{٢} + ١ = (\frac{٤}{٣})^{٢} + ١$

$= \frac{١٦}{٩} + ١ = \frac{٩ + ١٦}{٩} = \frac{٢٥}{٩}$

⊙ قا²ب $= (\frac{١٠}{٦})^{٢} = (\frac{٥}{٣})^{٢} = \frac{٢٥}{٩}$

نلاحظ أن ظا²ب + ١ ⟸ = قا²ب

مثال ٥ : إذا كان جا $\theta = \frac{٨}{١٧}$ حيث $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$

أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ

الحل

الزاوية تقع فى الربع الثانى

لأنها تقع بين ٩٠ ، ١٨٠

ومن نظرية فيثاغورث

و ل = $\sqrt{١٧^٢ - ٨^٢}$ = $\sqrt{٢٨٩ - ٦٤}$ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

وضعت ول = - ١٥ سم لأنها على الاتجاه السالب لمحور السينات

∴ جا θ = $\frac{٨}{١٧}$ جتا θ = $\frac{-١٥}{١٧}$ ظا θ = $\frac{-٨}{١٥}$

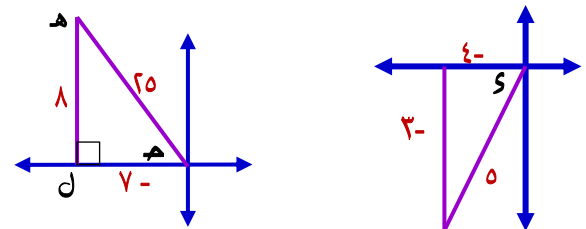
قتا θ = قا θ = ظتا θ =

مثال ٦ : إذا كانت جتا هـ = - $\frac{٧}{٢٥}$ حيث هـ أصغر زاوية موجبة ، ظا ى = $\frac{٣}{٤}$ حيث ى أكبر زاوية موجبة حيث ٠ ≤ ى ≤ ٣٦٠ أوجد :

جتا(١٨٠+ى) جتا(٩٠ -هـ) + جتا(١٨٠ -هـ) جا(١٨٠ -ى)

الحل

جتا هـ سالبة لذا فإن هـ تقع فى الربع الثانى او الثالث ولكن هـ اصغر زاوية موجبة لذا فإن هـ تقع فى الربع الثانى

ظا ى موجبة لذا فإن ى تقع فى الربع الاول او الثالث ولكن ى هى أكبر زاوية موجبة لذا فإنها تقع فى الربع الثالث

جتا(١٨٠+ى) جتا(٩٠ -هـ) + جتا(١٨٠ -هـ) جا(١٨٠ -ى)

= - جتا ى × جا هـ + (- جتا هـ) × جا ى

= - جتا ى × جا هـ - جتا هـ × جا ى

= - ($-\frac{٤}{٥}$) × $\frac{٨}{٢٥}$ - ($-\frac{٧}{٢٥}$) × $-\frac{٣}{٥}$

= $\frac{٣٢}{١٢٥}$ - $\frac{٢١}{١٢٥}$ = $\frac{١١}{١٢٥}$

مثال ٧ : إذا كانت ا ، ب زاويتين حادتين موجبتين وكان ٤ قا ا = ٥ ، ١٢ ظتا ب = ٥ أوجد قيمة :

جا ا جتاب + جتا ا جاب

الحل

بإستخدام نظرية فيثاغورث نوجد الأضلاع الناقصة حيث

قا ا = $\frac{٥}{٤}$ ⟸ جتا ا = $\frac{٤}{٥}$ ظتاب = $\frac{٥}{١٢}$ ⟸ ظاب = $\frac{١٢}{٥}$

∴ قيمة المقدار

جا ا جتاب + جتا ا جاب =

= $\frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{١٣} + \frac{٤}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} = \frac{١٥}{٦٥} + \frac{٤٨}{٦٥} = \frac{١٥+٤٨}{٦٥} = \frac{٦٣}{٦٥}$

مثال ٨ : إذا كانت :

٢٥ جاب + ٢٤ = ٠ حيث ب أصغر زاوية موجبة

٥ ظاهـ + ١٢ = ٠ حيث هـ أكبر زاوية موجبة

∀ ب ، هـ ∈]٠ ، ٣٦٠[

أوجد قيمة :

(١) قتا(١٨٠+ب) ظتا(٩٠-هـ) - قا(٣٦٠+ب) ظا(٣٦٠-هـ)

(٢) قتا(٩٠+ب) ظتا(٢٧٠ +هـ) ظا(٢٧٠ - ب) قتا(٢٧٠ + هـ)

الحل

٢٥ جاب + ٢٤ = ٠ ⟸ جاب = - $\frac{٢٤}{٢٥}$

∴ ب فى الربعين الثالث والرابع

ولكن ب أصغر زاوية موجبة ∴ ب فى الربع الثالث

٥ ظاهـ + ١٢ = ٠ ⟸ ظاهـ = - $\frac{١٢}{٥}$

∴ هـ فى الربعين الثانى والرابع

ولكن ب أكبر زاوية موجبة ∴ هـ فى الربع الرابع

إستخدم نظرية فيثاغورث

(١) قتا(١٨٠+ب) ظتا(٩٠-هـ) - قا(٣٦٠+ب) ظا(٣٦٠-هـ)

= - قتاب ظاهـ - قاب (- ظاهـ) =

= $-\frac{-٢٥}{٢٤} \times \frac{-١٢}{٥} - \frac{-٢٥}{٧} \times (-\frac{-١٢}{٥})$ =

= $-\frac{٥}{٢٤} \times ١٢ + \frac{٥}{٧} \times ١٢$ = $-\frac{٥}{٢} + \frac{٥}{٧} \times ١٢$ = $-\frac{٥}{٢} + \frac{٦٠}{٧}$

= $\frac{-٣٥+١٢٠}{١٤} = \frac{٨٥}{١٤}$

(٢) متروك للطالب

التشابه

التشابه

يقال عن شكلين أنهما متشابهان إذا كان أحدهما مطابق للاخر بعد إجراء تحجيم عليه سواء تكبير او تصغير مع إمكانية التأثير عليه بدوران أو انتقال

تشابه المضلعات

يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الاضلاع اذا توفرت الشروط الاتية
(١) الزوايا المتناظرة متساوية
(٢) الاضلاع المتناظرة متساوية

ففى الشكل المقابل

شروط تشابه المضلعين أ ب هـ ى ، س ص ع ل هي

(١) تناسب الاضلاع :

$$\Leftarrow \frac{أب}{س ص} = \frac{ب هـ}{ص ع} = \frac{هـ ى}{ع ل} = \frac{ى أ}{ل س} = \text{نسبة التشابه}$$

أو معامل التشابه

(٢) تساوي الزوايا

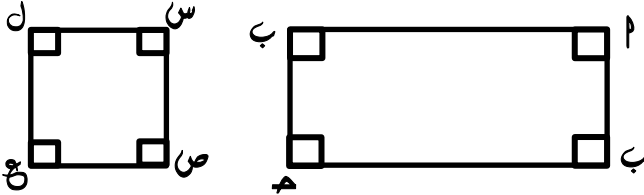
$\Leftarrow$ ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{س}$) ، ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{ص}$) ، ق($\hat{هـ}$) = ق($\hat{ع}$) ، ق($\hat{ى}$) = ق($\hat{ل}$)

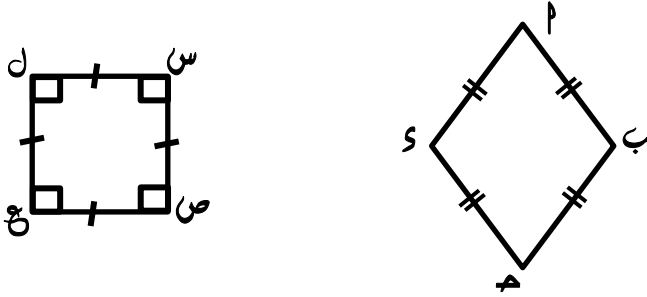
وإذا كانت المضلعات متاشبهه فإنه :

☹ تتناسب الاضلاع ☹ تتساوي الزوايا

ملاحظات مهمة

(١) لكي يتشابه مضلعان لا بد من توافر الشرطان معا ولا يمكن التشابه بتوافر شرط واحد فقط فالمعين والمربع لا يتشابهان بالرغم من تناسب الاضلاع والمستطيل والمربع لا يتشابهان بالرغم من تساوي الزوايا

☹ المستطيل والمربع

بملاحظة الشكلين نجد تساوي الزوايا المتناظرة فى المستطيل والمربع وبالرغم من ذلك الشكلين غير متشابهين

☹ المربع والمعين

بملاحظة الشكلين السابقين نجد أن هناك تناسب بين الاضلاع ومع ذلك المضلعين غير متشابهين

(٢) المضلعان المتطابقان يكونان متشابهان والعكس غير صحيح دائما

(٣) معامل التشابه = $\frac{\text{أحد أضلاع المضلع الأول}}{\text{المناظر له المضلع الثاني}}$

(٤) إذا كان معامل التشابه (نسبة التشابه) = ١ فإن المضلعان يكونان متطابقان

(٥) المضلعان المشابهان لثالث يكونان متشابهان

(٦) كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الاضلاع تكون متشابهة

(٧) نواتج التشابه هي
☹ تساوي الزوايا المتناظرة
☹ تناسب الاضلاع المتناظرة

(٨) معامل التشابه

معامل التشابه هو النسبة بين اى ضلعين متناظرين فى المضلعين او النسبة بين محيطي المضلعين

معامل التشابه = $\frac{\text{طول اى ضلع فى المضلع الاول}}{\text{الضلع المناظر له فى الضلع الثاني}}$ = $\frac{\text{محيط المضلع الاول}}{\text{محيط المضلع الثاني}}$

مثال ١ فى الشكل المقابل

المضلع ا ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ن

ا ب = ٦ سم ، ب جـ = ٤ سم ، جـ ء = ٩ سم

ء ا = ١٠ سم ، ع ن = ٣,٥ سم

أوجد طول كلاً من $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{س ن}}$

الحل

∵ المضلع ا ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{ء ا}}{\text{ن س}}$

∴ $\frac{٦}{\text{س ص}} = \frac{٤}{\text{ص ع}} = \frac{٩}{٣,٥} = \frac{١٠}{\text{ن س}}$

∴ س ص = $\frac{٦ \times ٣,٥}{٩}$ = $٢\frac{١}{٣}$ سم = ٢,٣٣ سم

∴ ص ع = $\frac{٤ \times ٣,٥}{٩}$ = $١\frac{٥}{٩}$ سم = ١,٥٦ سم

∴ ن س = $\frac{١٠ \times ٣,٥}{٩}$ = $٣\frac{٨}{٩}$ سم = ٣,٨٩ سم

مثال ٢ : فى الشكل المقابل

Δ ا ء هـ ~ Δ ا ب جـ

أثبت أن $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

وإذا كان : ا ء = ٤ سم ،

ء ب = ٢ سم ،

هـ جـ = ١,٥ سم

، ب جـ = ٥ سم

أوجد:

طول كلاً من $\overline{\text{ا هـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$

الحل

∵ المضلع ا ء هـ ~ المضلع ا ب جـ

ومن نواتج التشابه

(١) تساوي الزوايا المتناظرة

ق(∠ا ء هـ) = ق(∠ا ب جـ)

وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

(٢) تناظر الاضلاع المتناظرة

∴ $\frac{\text{ا ء}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا جـ}}$ ⟸ $\frac{٤}{٤+٢} = \frac{\text{ء هـ}}{٥} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا هـ} + ١,٥}$

⟸ $\frac{٤}{٦} = \frac{\text{ء هـ}}{٥} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا هـ} + ١,٥}$

⟸ ء هـ = $\frac{٤ \times ٥}{٦}$ = $٣\frac{١}{٣}$ سم = ٣,٣٣ سم

⟸ ٦ × ا هـ = ٤ × (ا هـ + ١,٥)

⟸ ٦ ا هـ = ٤ ا هـ + ٦

٦ ا هـ − ٤ ا هـ = ٦ ⟸ ٢ ا هـ = ٦

∴ ا هـ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ سم

مثال ٣ : فى الشكل المقابل

Δ ء ب ا ~ Δ ا ب جـ ، ق(∠ب ا جـ) = ٩٠°

أثبت أن ا ء ⊥ ب جـ ، وإذا كان ا ب = ٨ سم ، ا جـ = ٦ سم أوجد طول ب ء

الحل

∵ Δ ء ب ا ~ Δ ا ب جـ

ومن نواتج التشابه

(١) تساوي الزوايا المتناظرة

ق(∠ب ء ا) = ق(∠ب ا جـ) = ٩٠°

∴ ا ء ⊥ ب جـ

(٢) تناظر الاضلاع المتناظرة

∴ ءب / أب = بأ / ب حـ = أء / حـ أ ⟸ ءب / ٨ = ٨ / ب حـ = أء / ٦

نلاحظ عدم وجود نسبة معلومة بالتالى يجب إيجاد الضلع ب حـ باستخدام فيثاغورث

فى الـ Δ أ ب حـ القائم فى أ

(ب حـ)^2 = (أ ب)^2 + (أ حـ)^2

ب حـ = ٨^2 + ٦^2 = ٦٤ +٣٦ = ١٠٠ = ١٠

وبالتعويض عن قيمة ب حـ فى نواتج التناسب

ءب / ٨ = ٨ / ب حـ = أء / ٦ ⟸ ءب / ٨ = ٨ / ١٠ = أء / ٦

ب ء = (٨ × ٨) / ١٠ = ٦,٤ سم

أ ء = (٨ × ٦) / ١٠ = ٤,٨ سم

مثال ٤ : فى الشكل المقابل

مستطيلان متشابهان بعدا الاول ٨ سم ، ١٢ سم ، ومحيط الثاني ٢٠٠ سم ، أوجد طول وعرض المستطيل الثاني ومساحته

الحل

يتشابه المستطيلان إذا تناسب طول وعرض احدهما مع نظائرهما فى الاخر

∵ المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل س ص ع ل

من نواتج التشابه :

(١) تناسب الاضلاع المتناظرة :

س ل / أء = ل ع / ء حـ = ع ص / حـ ب = ص س / ب أ ⟸ س ل / ١٢ = ل ع / ٨

س ل / ل ع = ١٢ / ٨ = ٣ / ٢ ⟸ س ل = ٣ م ، ل ع = ٢ م

ومحيط س ص ع ل = ٢٠٠

∴ س ل + ل ع = نصف المحيط = ١٠٠

٣ م + ٢ م = ١٠٠ ⟸ ٥ م = ١٠٠

م = ١٠٠ / ٥ = ٢٠

∴ س ل = الطول = ٣ م = ٣ × ٢٠ = ٦٠ سم

∴ ل ع = العرض = ٢ م = ٢ × ٢٠ = ٤٠ سم

المساحة = الطول × العرض = ٦٠ × ٤٠ = ٢٤٠٠ سم^2

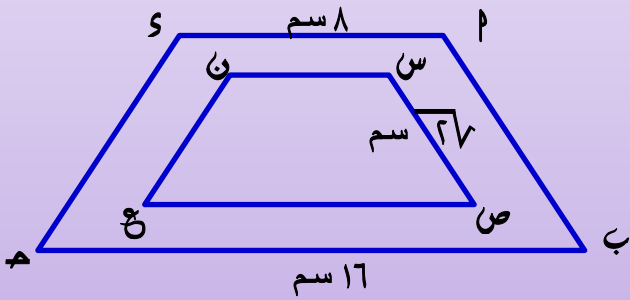
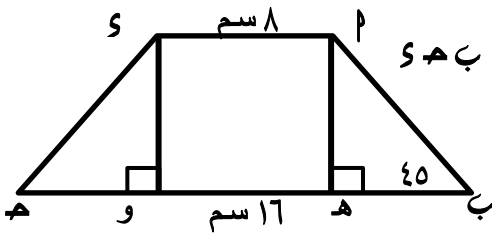
مثال ٥ : فى الشكل المقابل

شبه المنحرف أ ب حـ ء ~ شبه المنحرف س ص ع ن

ب حـ // أ ء ، أ ء = ٨ سم ، ب حـ = ١٦ سم ،

س ص = $\sqrt{2}$ سم ، ق(∠ب) = ق(∠حـ) = ٤٥°

أوجد طول أ ب ، س ن ومعامل التشابه

وأوجد محيط المضلع س ص ع ن

الحل

أولا فى الشكل أ ب حـ ء

نرسم أ هـ ⊥ ب حـ ، ء و ⊥ ب حـ

∵ أ هـ // ء و ، أ ء // هـ و

∴ أ هـ و ء مستطيل ∴ أ ء = هـ و = ٨ سم

∵ ق(ب̂) = ق(حـ̂) = ٤٥ ، ق(ب هـ̂ أ) = ق(حـ و̂ ء) = ٩٠

∴ شبه المنحرف أ ب حـ ء متساوي الساقين أ ب = حـ ء

∴ Δ أ ب هـ ≡ Δ ء حـ و وكلاهما متساويا الساقين

∴ ب هـ = و حـ = (١٦ − ٨) / ٢ = ٤ سم

من فيثاغورث : (أ ب)^2 = (ب هـ)^2 + (أ هـ)^2

أ ب = ٤^2 + ٤^2 = ١٦ + ١٦ = $\sqrt{32}$ = ٤$\sqrt{2}$

∵ شبه المنحرف أ ب حـ ء ~ شبه المنحرف س ص ع ن

∴ أب / س ص = ب حـ / ص ع = حـ ء / ع ن = ء أ / ن س ⟸ ٤$\sqrt{2}$ / $\sqrt{2}$ = ٨ / ن س

ن س = (٨ × $\sqrt{2}$) / ٤$\sqrt{2}$ = ٢ سم

☹ **معامل التشابه** $= \dfrac{\text{اى ضلع من المضلع الاول}}{\text{الضلع المناظر له من المضلع الثاني}}$

$= \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$

☹ $\dfrac{\text{محيط الاول}}{\text{محيط الثاني}} = \dfrac{\text{اى ضلع من المضلع الاول}}{\text{الضلع المناظر له من المضلع الثاني}}$

$\dfrac{8 + 4\sqrt{2} + 16 + 4\sqrt{2}}{م_2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{24 + 8\sqrt{2}}{م_2} = 4$

$\Leftarrow م_2 = \dfrac{24 + 8\sqrt{2}}{4} = 6 + 2\sqrt{2}$ سم

المستطيل الذهبي

هو مستطيل يمكن تقسيمه الى مربع ومستطيل يشبه المستطيل الاصلى بشرط ان يكون طوله اصغر من ضعف عرضه

النسبة الذهبية

هي النسبة بين طول المستطيل الذهبي وعرضه وهي تساوي ١.٦١٨

إيجاد النسبة الذهبية

فى الشكل المقابل

أ ب جـ د مستطيل طوله اصغر من ضعف عرضه

ونفرض ان عرضه = ١ سم وان طوله س

المستطيل أ ب هـ ن ~ المستطيل ب جـ د أ

$\dfrac{أب}{بجـ} = \dfrac{بهـ}{جـد} \Leftarrow \dfrac{1}{س} = \dfrac{س - 1}{1}$

$س(س - 1) = 1 \Leftarrow س^2 - س - 1 = 0$

وبحل المعادلة $\Leftarrow س = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618$

تدريبات على تشابه المضلعات

(١) مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٦ سم أوجد محيط ومساحة مستطيل اخر مشابه له إذا كان معامل التشابه = ٤

(٢) إذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ب ع ص فأثبت أن $\overline{س ص}$ // $\overline{أ د}$ وإذا كان محيط المضلع أ ب جـ د = ١٤ سم ومحيط الشكل س ب ع ص = ١٠ سم طول س ب = ٢ سم فأوجد طول أ ب

تفكير ناقد

(١) يتشابه المستطيلان اذا ....

(٢) يتشابه المربعان اذا ....

تشابه المثلثات

تشابه المثلثات حالة خاصة من تشابه المضلعات
ولكن لكي يتشابه المثلثين فإن شروط ذلك اقل من شروط تشابه مضلعين
ولتشابه مسلمات ونظريات ونتائج نسردها فيما يلي

الحالة الاولى لتشابه مثلثين

مسلمة

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زوايا المثلث الاول مع نظائرها فى المثلث الاخر

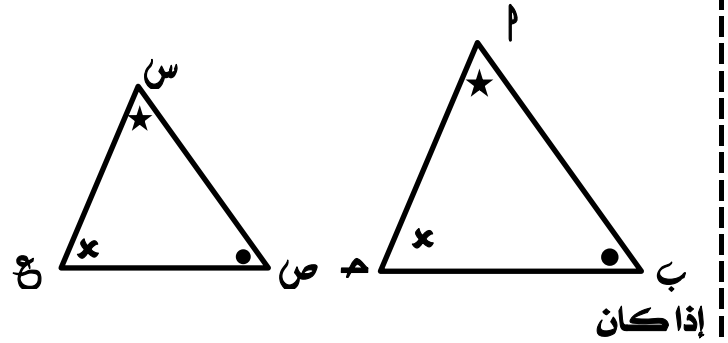
إذا تطابقت زوايا مثلث مع زوايا مثلث اخر فإن المثلثان يكونان متشابهان

فى الشكل المقابل :

إذا كان

ق(بَ) = ق(صَ) ، ق(أَ) = ق(سَ)

ق(جَ) = ق(عَ)

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع

نتيجة ١

إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرهما فى مثلث اخر كان المثلثان متشابهين

لأنه إذا تطابقت زاويتان فى مثلث مع نظائرهما فى الاخر فإن الثالثة فى المثلث الاول تساوي الثالثة فى المثلث الاخر بالتالى لاثبات تشابه مثلثين يكتفى فقط باثبات تساوي زاويتين فى مثلث مع نظائرهما فى الاخر

ففى الشكل المقابل :

إذا كان :

∠ص ≡ ∠ب

∠ع ≡ ∠جـ

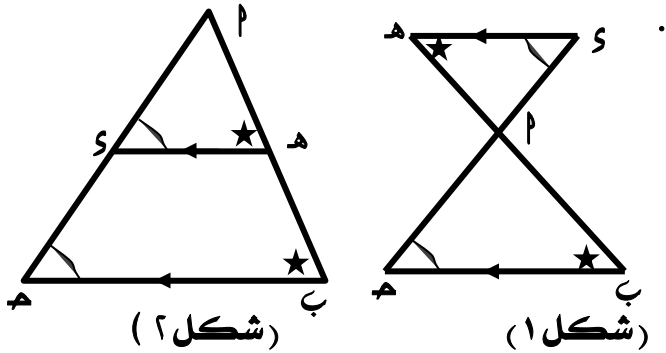
فإنه يكون

Δ س ص ع ~ Δ أ ب جـ

وذلك لأن ∠س ≡ ∠أ

نتيجة ٢

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الاخرين او امتداداتهما (المستقيمين الحاملين لهما) فإن المثلث الناتج يشبه المثلث الاصلي

وذلك بسبب انه تتساوي زوايا المثلث الاول مع زوايا المثلث الاخر بسبب التوازي والتقابل بالرأس او التوازي والاشتراك فى زاوية

ففى الشكل المقابل :-

(شكل ١) (شكل ٢)

فى شكل (١)

∵ ب جـ // هـ ء ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ قاطعين لهما

∴ ق(بَ) = ق(هَ) بالتبادل

∴ ق(جَ) = ق(ءَ) بالتبادل

∵ $\overline{ب هـ}$ ∩ $\overline{جـ ء}$ = { أ }

∴ ق(∠ء أ هـ) = ق(∠ب أ جـ) بالتقابل بالرأس

فى شكل (٢)

∵ ب جـ // هـ ء ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ قاطعين لهما

∴ ق(بَ) = ق(أ هَـ ء) بالتناظر

∴ ق(جَ) = ق(أ ءَ هـ) بالتناظر

∠أ مشتركة

∴ Δ أ هـ ء ~ Δ أ ب جـ

نتيجة ٣

إذا رسم من رأس الزاوية القائمة فى المثلث القائم عمودا على الوتر فإنه يقسم المثلث إلى مثلثين كلا منهما يشبه المثلث الاصلي

ففي الشكل المقابل :-

إذا كان ق(ب أ جـ) = ٩٠° وكان $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

فإن :

ق(ب أ جـ) = ق(ب ء أ) = ق(جـ ء أ) = ٩٠

∠ب تتمم ∠ب أ ء ،

∠ ء أ جـ تتمم ∠ب أ ء

⟸ ∠ب ≡ ∠ء أ جـ

∠ب أ ء تتمم ∠ ء أ جـ ،

∠جـ تتمم ∠ء أ جـ

⟸ ∠جـ ≡ ∠ب أ ء

∴ يكون :-

Δ ب أ ء ~ Δ أ جـ ء ~ Δ ب جـ أ

ومن نواتج تشابه المثلث

Δ ب أ ء ~ Δ أ جـ ء

$\frac{ب أ}{أ جـ} = \frac{أ ء}{جـ ء} = \frac{ب ء}{أ ء}$ ⟸ (أ ء)^٢ = جـ ء × ب ء

Δ أ جـ ء ~ Δ ب جـ أ

$\frac{أ جـ}{ب جـ} = \frac{جـ ء}{جـ أ} = \frac{أ ء}{ب ء}$ ⟸ (أ جـ)^٢ = ب جـ × جـ ء

Δ ب أ ء ~ Δ ب جـ أ

$\frac{ب أ}{ب جـ} = \frac{أ ء}{أ جـ} = \frac{ب ء}{ب أ}$ ⟸ (أ ب)^٢ = ب جـ × ب ء

⟸ أ ب × أ جـ = ب جـ × أ ء

وهي بنود نظرية اقليدس وما سبق اثبات هندسي لها

ملاحظات مهمة :

(١) يتشابه المثلثان القائمي الزاوية إذا تطابق فى احدهما زاوية حادة مع اخري فى المثلث الاخر

(٢) يتشابه المثلثان المتساويا الساقين اذا تطابق فى احدهما زاوية مع نظيرتها فى الاخر

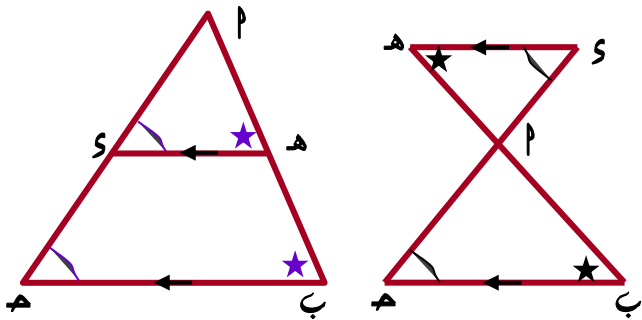
(٣) تتشابه المثلثات المتساوية الاضلاع دائما دون شروط وذلك لتحقق الشروط تلقائيا

حالات تساوي الزوايا

(١) قطع مستقيم لضلعين فى مثلث موازيا الاخر وهو نتيجة رقم ٢ على الحالة الاولى

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ Δ أ هـ ء ~ Δ أ ب جـ

وذلك بسبب التوازي فتتساوي الزوايا بالتبادل او التناظر

(٢) إذا تقاطع وتران داخل دائرة

$\overline{أ ب} \cap \overline{هـ ء}$ = { م }

يكون Δ أ م جـ ~ Δ ء م ب

∵ ∠أ ، ∠ء محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{هـ ب}$

∴ ق(∠أ) = ق(∠ء)

∵ ∠هـ ، ∠ب محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{أ ء}$

∴ ق(∠هـ) = ق(∠ب)

∵ $\overline{أب} \cap \overline{هـ ء} = \{م\}$

∴ ق(∠أ م هـ) = ق(∠ء م ب) بالتقابل بالرأس

(٣) إذا تقاطع وتران خارج الدائرة

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{هـ ء} = \{م\}$

يكون △ م ب ء ~ △ م هـ أ

∵ ∠م ب ء خارجة عن الرباعي الدائري أ ب هـ ء

∴ ق(م ب̂ ء) = ق(هـ̂)

احداهما خارجة والاخري داخلة مقابلة للمجاورة لها

∵ ∠م ء ب خارجة عن الرباعي الدائري أ ب هـ ء

∴ ق(م ء̂ ب) = ق(أ̂)

احداهما خارجة والاخري داخلة مقابلة للمجاورة لها

∠م زاوية مشتركة

(٤) إذا تقاطع مماس ووتر خارج الدائرة

$\overleftrightarrow{ب هـ} \cap \overleftrightarrow{م أ} = \{م\}$

يكون △ م أ هـ ~ △ م ب أ

∵ $\overleftrightarrow{م أ}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overline{أ هـ}$ وترا فيها

∴ ق(∠م أ هـ) = ق(∠ب)

مماسية ومحيطية مشتركتان فى نفس القوس $\overset{\frown}{أ هـ}$

∠م مشتركة

مثال ١ : أ ب هـ △ فيه ء ∈ $\overline{أب}$ ، هـ ∈ $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب هـ}$ ، ب ء = ١,٢ سم ، أ هـ = ٣ سم ، أ هـ = ٤ سم ، ء هـ = ٤,٢ سم

(١) أثبت أن △ أ ء هـ ~ △ أ ب هـ

(٢) أوجد طول كلا من $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ب هـ}$

الحل

∵ $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أ هـ}$ قاطعين لهما

∴ ق(∠أ ء هـ) = ق(∠ب) بالتناظر

∴ ق(∠أ هـ ء) = ق(∠هـ) بالتناظر

∴ △ أ ء هـ ~ △ أ ب هـ

ومن نواتج التشابه

(١) تناسب الاضلاع

$\frac{أء}{أب} = \frac{أهـ}{أهـ} = \frac{ءهـ}{بهـ} \Leftarrow \frac{أء}{أء+١,٢} = \frac{٣}{٤} = \frac{٤,٢}{بهـ}$

☹ $\frac{أء}{أء+١,٢} = \frac{٣}{٤} \Leftarrow ٤\ أء = ٣\ أء = ٣,٦$

$٤\ أء - ٣\ أء = ٣,٦ \Leftarrow أء = ٣,٦$ سم

☹ $\frac{٣}{٤} = \frac{٤,٢}{بهـ} \Leftarrow بهـ = \frac{٤ \times ٤,٢}{٣} = ٥,٦$ سم

مثال ٢ : أب ، ءحـ وتران فى دائرة ،
أب ∩ ءحـ = { هـ } حيث هـ خارج الدائرة ،
أب = ٤ سم ، ء هـ = ٧ سم ، ب هـ = ٦ سم
أثبت أن Δ أ ء هـ ~ Δ حـ ب هـ
ثم أوجد طول حـ هـ

الحل

∵ ∠ هـ ب حـ خارجة عن الرباعي الدائري أ ب حـ ء
∴ ق(∠ هـ ب حـ) = ق(∠ أ)
إحداهما خارجة والاخري داخلة مقابلة للمجاورة لها

∴ Δ هـ ب حـ ، Δ هـ ء أ
فيهما { ق(∠ هـ ب حـ) = ق(∠ أ) ، ∠ هـ مشتركة

∴ Δ هـ ب حـ ~ Δ هـ ء أ
ومن نواتج التشابه
(١) تناسب الاضلاع

هـ ب / هـ ء = ب حـ / ء أ = هـ حـ / هـ أ ⟸ ٦ / (حـ هـ + ٧) = ب حـ / ء أ = حـ هـ / ١٠

حـ هـ (حـ هـ + ٧) = ٦ × ١٠
(حـ هـ)^{2} + ٧ حـ هـ = ٦٠
(حـ هـ)^{2} + ٧ حـ هـ - ٦٠ = ٠
(حـ هـ - ٥) (حـ هـ + ٧) = ٠
حـ هـ = ٥ سم أ، حـ هـ = - ٧ مرفوض

مثال ٣ : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ،
رسم أء ⊥ ب حـ ليقطعه فى ء إذا كان
ب ء / ء حـ = ١ / ٢ ، أ ء = ٦√٢ أوجد طول كلا من
ب ء ، أ ب ، أ حـ

الحل

∵ ب ء / ء حـ = ١ / ٢ ⟸ ب ء = ١ م ، ء حـ = ٢ م
∵ ق(∠ ب أ حـ) = ٩٠ ، أ ء ⊥ ب حـ
∴ Δ ء ب أ ~ Δ ء أ حـ ~ Δ أ ب حـ
ومن نواتج التشابه المثلثين Δ ء ب أ ~ Δ ء أ حـ
(١) تناسب الاضلاع

ء ب / ء أ = ب أ / أ حـ = أ ء / حـ ء ⟸ ء ب / ء أ = أ ء / حـ ء

⟸ (أ ء)^{2} = ء ب × حـ ء
(٦√٢)^{2} = ١ م × ٢ م = ٢ م^{2}
٣٦ × ٢ = ٢ م^{2} ⟸ م^{2} = ٣٦ ⟸ م = √٣٦ = ٦
ء ب = م = ٦ سم ، ء حـ = ٢ م = ٢ × ٦ = ١٢ سم

ومن نواتج التشابه المثلثين Δ ء ب أ ~ Δ أ ب حـ
ينتج أن (أ ب)^{2} = ب ء × ب حـ
= ٦ × ١٨ = ١٠٨
⟸ أ ب = √١٠٨ = ٦√٣

ومن نواتج التشابه المثلثين Δ ء أ حـ ~ Δ أ ب حـ
ينتج أن (أ حـ)^{2} = حـ ء × حـ ب
= ١٢ × ١٨ = ٢١٦
أ حـ = √٢١٦ = ٦√٦

مثال ٤ : فى الشكل المقابل

ق(∠ ا ء هـ) = ق(∠ جـ) ، ا ء = ٤ سم ، ا هـ = ٥ سم ، ء هـ = ٦ سم ، هـ جـ = ٣ سم

أوجد طول كلاً من ء ب ، ب جـ

الحل

الـ Δ ا ء هـ ، Δ ا جـ ب

فيهما { ق(∠ ا ء هـ) = ق(∠ جـ) معطى ، ∠ ا مشتركة }

∴ Δ ا ء هـ ~ Δ ا جـ ب

ومن نواتج التشابه المثلثين

(١) تناسب الاضلاع

$\frac{اء}{اجـ} = \frac{ءهـ}{جـب} = \frac{اهـ}{اب} \Leftarrow \frac{٤}{٨} = \frac{٦}{جـب} = \frac{٥}{اب}$

☹ $\frac{٤}{٨} = \frac{٦}{جـب} \Leftarrow$ ب جـ $= \frac{٨ \times ٦}{٤} =$ ١٢ سم

☹ $\frac{٤}{٨} = \frac{٥}{اب} \Leftarrow$ ا ب $= \frac{٨ \times ٥}{٤} =$ ١٠ سم

∴ ء ب = ١٠ − ٤ = ٦ سم

مثال ٥ : فى الشكل المقابل

ء ب مماس عند ب ، ء هـ قاطع للدائرة فى ا ، هـ على الترتيب أثبت أن : Δ ء ب ا ~ Δ ء هـ ب

وإذا كان ء ا = ٤ سم ، ا هـ = ٥ سم ,

أوجد طول ء ب

الحل

∵ ء ب مماس للدائرة عند ب ، ا ب وتر

∴ ق(∠ ء ب ا) = ق(∠ هـ)

مماسية ومحيطية مشتركتان فى نفس القوس ا ب

∴ الـ Δ ء ب ا ، ء هـ ب

فيهما { ق(∠ ء ب ا) = ق(∠ هـ) إثبات ، ∠ ء مشتركة }

∴ Δ ء ب ا ~ Δ ء هـ ب

ومن نواتج التشابه المثلثين

(١) تناسب الاضلاع

$\frac{ءب}{ءهـ} = \frac{با}{هـب} = \frac{ءا}{ءب} \Leftarrow \frac{ءب}{ءهـ} = \frac{ءا}{ءب}$

$(ءب)^2 = ءا \times ءهـ = ٤ \times (٤ + ٥) = ٤ \times ٩ = ٣٦$

ء ب $= \sqrt{٣٦} =$ ٦ سم

ملحوظة

(١) إذا تقاطع مماس وقاطع للدائرة خارجها فإن مربع طول المماس = حاصل ضرب جزئي القاطع

(٢) إذا تقاطع قاطعان للدائرة خارج الدائرة فإن حاصل ضرب جزئي القاطع الاول = حاصل ضرب جزئي القاطع الثاني

مثال ٦ : فى الشكل المقابل

ا ب جـ Δ قائم الزاوية فى ا ، ا ء ⊥ ب جـ ، ء هـ ⊥ ا ب ، ء ن ⊥ ا جـ

أثبت أن مساحة المستطيل ا هـ ء ن

= ا هـ × هـ ب × ا ن × ن جـ

الحل

∵ أ ء ⊥ ب جـ ∴ ق(∠ب ء أ) = ق(∠جـ ء أ) = ٩٠°

∵ ق(∠ب ء أ) = ٩٠ ، ء هـ ⊥ أ ب

∴ Δ هـ أ ء ~ Δ هـ ء ب

ومن نواتج التشابه تناسب الاضلاع كالتالى

∴ هـ أ / هـ ء = أ ء / ء ب = هـ ء / هـ ب

⟸ (هـ ء)^2 = هـ أ × هـ ب

هـ ء = √(هـ أ × هـ ب) —— (١)

∵ ق(∠أ ء جـ) = ٩٠° ، ء ن ⊥ أ جـ

∴ Δ ن جـ ء ~ Δ ن ء أ

ومن نواتج التشابه تناسب الاضلاع كالتالى

ن جـ / ن ء = جـ ء / ء أ = ن ء / ن أ

⟸ (ن ء)^2 = ن جـ × ن أ

ن ء = √(ن جـ × ن أ) —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

مساحة المستطيل أ هـ ء ن = هـ ء × ن ء

= √(أ هـ × هـ ب × أ ن × ن جـ)

الحالة الثانية لتشابه مثلثين

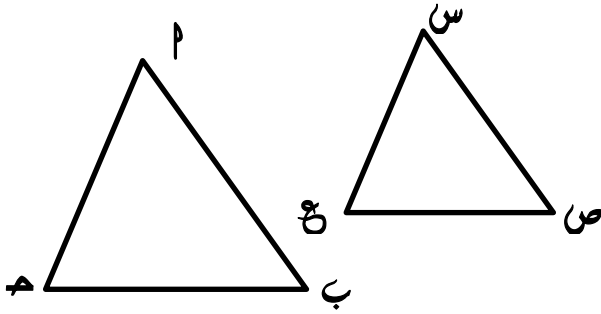
نظرية ١

إذا تناسبت أطوال اضلاع مثلثين فإنهما متشابهان

أى أنه يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال اضلاعهما المتناظرة

فى الشكل المقابل :

إذا كان س ص / أ ب = ص ع / ب جـ = س ع / أ جـ **فإن**

Δ ع س ص ~ Δ جـ أ ب

ويجب ملاحظة انه عند ايجاد النسبة بين كل ضلعين فإننا نرتب اضلاع المثلث الاول والثاني ثم نقارن بين الاضلاع بالتناظر

مثال ٧ : فى الشكل المقابل

ب ، ص ، جـ على استقامة واحدة أثبت أن :

أ ب = ١٢ سم ، أ جـ = ب جـ = ب ص = ١٨ سم ،

ص جـ = ٦ سم ، ب س = ٩ سم ، س ص = ١٣,٥ سم

(١) Δ أ ب جـ ~ Δ س ب ص

(٢) $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ينصف ∠أ ب س

الحل

في Δ ب س ص :

ب ص = ١٨ سم ، س ص = ١٣,٥سم ، ب س = ٩ سم

في Δ أ ب جـ :

ب جـ = ٢٤ سم ، أ جـ = ١٨ سم ، أ ب = ١٢ سم

ب ص / ب جـ = ١٨ / ٢٤ = ٣ / ٤ ، س ص / أ جـ = ١٣,٥ / ١٨ = ٣ / ٤ ، ب س / أ ب = ٩ / ١٢ = ٣ / ٤

∴ ب ص / ب جـ = س ص / أ جـ = ب س / أ ب

∴ Δ س ب ص ~ Δ أ ب جـ

ومن نواتج التشابه

ق(∠س ب ص) = ق(∠أ ب جـ)

∴ ب جـ ينصف ∠ أ ب س

مثال ٨ : في الشكل المقابل

أ ب جـ ء شكل رباعي ، هـ ∈ ب ء حيث:

أ ب / أ ء = هـ جـ / ب جـ ، ب ء / أ ء = ب هـ / ب جـ أثبت أن

(١) أ ء // ب جـ (٢) أ ب // جـ هـ

الحل

∵ أ ب / أ ء = هـ جـ / ب جـ ⇐ ب جـ / أ ء = هـ جـ / أ ب —— (١)

∵ ب ء / أ ء = ب هـ / ب جـ ⇐ ب جـ / أ ء = ب هـ / ب ء —— (٢)

∴ ب جـ / أ ء = هـ جـ / أ ب = ب هـ / ب ء

∴ Δ هـ ب جـ ~ Δ ب ء أ

ومن نواتج التشابه

☹ ق(∠هـ ب جـ) = ق(∠ب ء أ)

وهما في وضع تبادل للقاطع ب ء

∴ ب جـ // أ ء

☹ ق(ب هـ^ جـ) = ق(ء ب^ أ)

وهما في وضع تبادل للقاطع ب هـ

∴ أ ب // جـ هـ

مثال ٩ : أ ب جـ مثلث ، ء ∈ ب جـ حيث

(أ ء)² = ب ء × ء جـ ،

ب أ × أ ء = ب ء × أ جـ

أثبت أن :

(١) Δ أ ب ء ~ Δ جـ أ ء (٢) أ ء ⊥ ب جـ

(٣) ق(∠ب أ جـ) = ٩٠°

الحل

∵ (أ ء)² = ب ء × ء جـ

أ ء × أ ء = ب ء × ء جـ ⇐ أ ء / ب ء = ء جـ / أ ء —— (١)

ب أ × أ ء = ب ء × أ جـ ⇐ أ ء / ب ء = أ جـ / أ ب —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

أ ء / ب ء = ء جـ / أ ء = أ جـ / أ ب ⇐ ∴ Δ جـ أ ء ~ Δ أ ب ء

ومن نواتج التشابه

☹ ق(جـ ء^ أ) = ق(أ ء^ ب) = ١٨٠ / ٢ = ٩٠°

∴ أ ء ⊥ ب جـ

☹ ق(أ جـ^ ء) = ق(ب أ^ ء)

☹ ق(أ ب^ ء) = ق(جـ أ^ ء) بالجمع

ق(أ جـ^ ء) + ق(أ ب^ ء) = ق(ب أ^ جـ)

∴ ق(∠ب أ جـ) = ٩٠°

مثال ١٠ : فى الشكل المقابل

أ ب = ٦ سم ، ب هـ = ١٢ سم ، هـ أ = ٨ سم

ن هـ = ٣ سم ، ء ب = ٤,٥ سم ، ء ن = ٦ سم

أثبت أن :

(١) Δ أ ب هـ ~ Δ ء ب ن

(٢) Δ هـ ن هـ متساوي الساقين

الحل

ب ن = ١٢ – ٣ = ٩ سم

فى Δ ء ب ن :

ب ن = ٩ سم ، ء ن = ٦ سم ، ء ب = ٤,٥ سم

فى Δ أ ب هـ :

ب هـ = ١٢ سم ، أ هـ = ٨ سم ، أ ب = ٦ سم

$\frac{\text{ب ن}}{\text{ب هـ}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{\text{ء ن}}{\text{أ هـ}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب أ}} = \frac{٤,٥}{٦} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{ب ن}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ء ن}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب أ}}$

∴ Δ ء ب ن ~ Δ أ ب هـ

ومن نواتج التشابه

∴ ق(ب ن̂ ء) = ق(ب هـ̂ أ) ——— (١)

∵ ب هـ ∩ ء هـ = {ن}

∴ ق(ب ن̂ ء) = ق(هـ ن̂ هـ) — (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

ق(ب هـ̂ أ) = ق(هـ ن̂ هـ)

∴ ن هـ = هـ هـ

الحالة الثالثة لتشابه مثلثين

نظرية ٢

إذا طابقت زاوية فى مثلث زاوية فى مثلث اخر ، وتناسبت أطوال الاضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهين

فى الشكل المقابل :

إذا كان :

$\frac{\text{ص س}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{س ع}}{\text{أ هـ}}$ ، ق(∠س) = ق(∠أ)

فإن : Δ ع ص س ~ Δ هـ ب أ

مثال ١١ : أ ب جـ Δ ، أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث $\overline{\text{أ هـ}}$ = ٢ سم ، د ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب د = ٤ سم

(١) أثبت أن : Δ ب د هـ ~ Δ ب أ جـ واوجد طول $\overline{\text{د هـ}}$

(٢) أثبت أن الشكل أ جـ د هـ رباعي دائري

الحل

في الـ Δ ب هـ د : ب هـ = ٦ سم ، ب د = ٤ سم

في الـ Δ ب جـ أ : ب جـ = ١٢ سم ، ب أ = ٨ سم

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ الـ Δ ب د هـ ، Δ ب أ جـ

فيهما $\left\{ \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}} \right.$ ، ∠ ب مشتركة

∴ Δ ب د هـ ~ Δ ب أ جـ

ومن نواتج التشابه

∵ ق(ب د̂ هـ) = ق(ب أ̂ جـ)

إحداهما خارجة والاخري داخلة مقابلة للمجاورة لها

∴ أ هـ د جـ شكل رباعي دائري

مثال ١٢ : في الشكل المقابل

$\overline{\text{أ ب}}$ ∩ $\overline{\text{جـ د}}$ = { هـ } وكان

أ هـ = ٢ سم ، هـ ب = ٤ سم

، جـ هـ = ٤ سم ، هـ د = ٨ سم

أثبت أن :

Δ أ جـ هـ ~ Δ ب د هـ

وإذا كان أ جـ = ٥ سم أوجد طول ب د

الحل

في الـ Δ أ هـ جـ : جـ هـ = ٤ سم ، أ هـ = ٢ سم

في الـ Δ د هـ ب : د هـ = ٨ سم ، ب هـ = ٤ سم

$\frac{\text{جـ هـ}}{\text{د هـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ∩ $\overline{\text{جـ د}}$ = { هـ }

∴ ق(د هـ̂ ب) = ق(جـ هـ̂ أ)

∴ الـ Δ ب د هـ ، Δ ب أ جـ

فيهما $\left\{ \frac{\text{جـ هـ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} \right.$ ، ق(د هـ̂ ب) = ق(جـ هـ̂ أ)

∴ Δ أ جـ هـ ~ Δ ب د هـ

ومن نواتج التشابه

$\frac{\text{جـ هـ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}}$ ⟸ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \frac{١}{٢}$

$\frac{٥}{\text{ب د}} = \frac{١}{٢}$ ⟸ ب د = ٥ × ٢ = ١٠ سم

مثال ١٣ : في الشكل المقابل

أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تتقاطع قطراه أ جـ ، ب د في هـ

فإذا كان $\frac{\text{ب أ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{د جـ}}$

أثبت أن :

(١) Δ أ ب هـ ~ Δ د ب جـ

(٢) $\overrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

الحل

∵ ∠ أ ، ∠ د محيطيتان تقابلان القوس $\frown{\text{ب جـ}}$

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ د) —— (١)

∵ $\frac{\text{ب أ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{د جـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{د جـ}}$ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : Δ أ ب هـ ~ Δ د ب جـ

ومن نواتج التشابه

(١) تساوي الزوايا

ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ د ب جـ)

∴ $\overrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

مثال ١٤ : فى الشكل المقابل

ﺍ ﺏ ﺣ Δ ، ٤ ∋ $\overline{ﺍﺏ}$ فإذا كان ﺍ ٤ = ٧ سم ، ٤ ب = ٩ سم ، ب ﺣ = ١٢ سم ، ﺍ ﺣ = ١٠ سم

أثبت أن :

(١) Δ ﺍ ب ﺣ ~ Δ ﺣ ب ٤ وأوجد ﺣ ٤

(٢) أثبت أن ﺣ ب مماسة للدائرة المارة برووس Δ ﺍ ٤ ﺣ

الحل

فى الـ Δ ﺣ ب ٤ :

ﺣ ب = ١٢ سم ، ب ٤ = ٩ سم

فى الـ Δ ﺍ ب ﺣ :

ﺍ ب = ١٦ سم ، ب ﺣ = ١٢ سم

$\frac{ﺣب}{ﺍب} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{ب٤}{ﺣب} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

Δ ﺍ ب ﺣ ، Δ ﺣ ب ٤

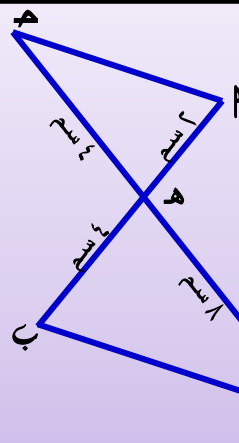
فيهما { ∠ب مشتركة ، $\frac{ﺣب}{ﺍب} = \frac{ب٤}{ﺣب}$ }

∴ Δ ﺍ ب ﺣ ~ Δ ﺣ ب ٤

ومن نواتج التشابه

(١) تساوي الزوايا

ق(∠ ب ﺍ ﺣ) = ق(∠ ب ﺣ ٤)

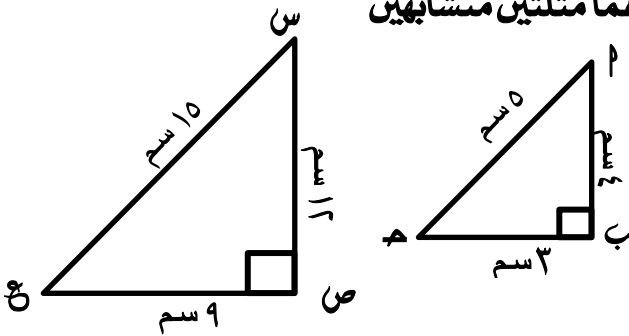
∴ ﺣ ب مماسة للدائرة المارة برووس Δ ﺍ ٤ ﺣ

العلاقة بين مساحتى سطحي مضلعين متشابهين

علمنا سابقا ان النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = النسبة بين طولي ضلعين ممتناظرين او = معامل التشابه

والان سنتعرف على النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين

فى الشكل المقابل

ﺍ ب ﺣ ، س ص ع مثلثين قائمي الزاوية في ب ، ص

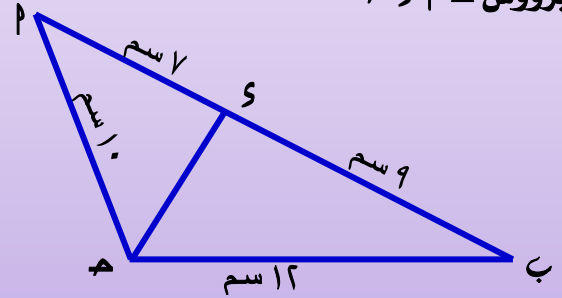
وهما مثلثين متشابهين

Δ ﺍ ب ﺣ ~ Δ س ص ع

$\frac{ﺍب}{سص} = \frac{بﺣ}{صع} = \frac{ﺍﺣ}{سع} = \frac{١}{٣} =$ معامل التشابه

م Δ ﺍ ب ﺣ = $\frac{١}{٢}$ × ب ﺣ × ﺍ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٤ = ٦ سم٢

مΔ س ص ع = $\frac{١}{٢}$ × ص ع × ص س = $\frac{١}{٢}$ ×٩ × ١٢ = ٥٤ سم٢

$\frac{مΔﺍبﺣ}{مΔسصع} = \frac{٦}{٥٤} = \frac{١}{٩} = (\frac{١}{٣})^٢ =$ (معامل التشابه)٢

أى أن النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين = مربع النسبة بين طولى اى ضلعين متناظرين = مربع معامل التشابه

نظرية ٣

النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي اي ضلعين متناظرين فيهما

اثبات النظرية

المعطيات : Δ ﺃ ب ﺟ ~ Δ ء ﻫ ن

المطلوب :

$$\frac{م \Delta أبجـ}{م \Delta ءهن} = \left(\frac{أب}{ءه}\right)^٢ = \left(\frac{بجـ}{هن}\right)^٢ = \left(\frac{أجـ}{نء}\right)^٢$$

العمل : نرسم ﺃ س ⊥ ب ﺟ ، ء ص ⊥ ﻫ ن

البرهان :

∵ Δ ﺃ ب ﺟ ~ Δ ء ﻫ ن

∴ ق(ب̂) = ق(ﻫ̂)

∴ $\frac{أب}{ءه} = \frac{بجـ}{هن}$ ——— (١)

∵ ق(س̂) = ق(ص̂) = ٩٠ ، ق(ب̂) = ق(ﻫ̂)

∴ Δ ﺃ ب س ~ Δ ء ﻫ ص

∴ $\frac{أب}{ءه} = \frac{أس}{ءص}$ ——— (٢)

$$\frac{م \Delta أبجـ}{م \Delta ءهن} = \frac{\frac{١}{٢} بجـ \times أس}{\frac{١}{٢} هن \times ءص} = \frac{بجـ}{هن} \times \frac{أس}{ءص}$$

بالتعويض من (١) ، (٢)

$$\frac{م \Delta أبجـ}{م \Delta ءهن} = \frac{بجـ}{هن} \times \frac{أس}{ءص} = \frac{أب}{ءه} \times \frac{أب}{ءه} = \left(\frac{أب}{ءه}\right)^٢$$

$$= \left(\frac{أب}{ءه}\right)^٢ = \left(\frac{بجـ}{هن}\right)^٢ = \left(\frac{أجـ}{نء}\right)^٢$$

مثال ١ : ﺃ ب ﺟ Δ مساحة سطحه ١٠٠ سم٢ رسم $\overleftrightarrow{ءه} // \overleftrightarrow{بجـ}$ ويقطع $\overline{أب}$ فى ء ، $\overline{أجـ}$ فى ﻫ فإذا كان $\frac{أء}{ءب} = \frac{٢}{٣}$ فأوجد مساحه سطح الشكل ء ب ﺟ ﻫ

الحل

∵ $\overline{ءه} // \overline{بجـ}$

∴ Δ ﺃ ء ﻫ ~ Δ ﺃ ب ﺟ

$$\therefore \frac{م\Delta(أءه)}{م\Delta(أبجـ)} = \left(\frac{أء}{أب}\right)^٢$$

$$\frac{م\Delta أءه}{١٠٠} = \left(\frac{٢}{٥}\right)^٢ = \frac{٤}{٢٥}$$

$$م \Delta أءه = \frac{١٠٠ \times ٤}{٢٥} = ١٦ \text{ سم}^٢$$

∴ م الشكل ء ب ﺟ ﻫ = ١٠٠ – ١٦ = ٨٤ سم٢

مثال ٢ : Δ ﺃ ب ﺟ فيه $\frac{أب}{بجـ} = \frac{٤}{٣}$ رسمت الدائرة المارة برؤوسه ، من نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع $\overleftrightarrow{أجـ}$ فى ﻫ أثبت أن : $\frac{م\Delta(أبجـ)}{م\Delta(أبجـ)} = \frac{٧}{١٦}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{بهـ}$ مماس للدائرة عند ب ، $\overline{بجـ}$ وتر فيهما

∴ ق(ﻫ ب̂ ﺟ) = ق(∠ ﺃ)

أحداهما مماسية والاخري محيطية مشتركتان فى نفس القوس

∴ Δ ﻫ ب ﺟ ، Δ ﻫ ﺃ ب

فيهما } ق(ﻫ ب̂ ﺟ) = ق(∠ ﺃ)
∠ ﻫ مشتركة

∴ Δ هـ ب جـ ~ Δ هـ ا ب

$$\frac{\text{م}(\Delta \text{هـ ا ب})}{\text{م}(\Delta \text{هـ ب جـ})} = \left(\frac{\text{ا ب}}{\text{جـ ب}}\right)^{2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{16}{9}$$

∴ م(Δ هـ ا ب) = ١٦ ك ، م(Δ هـ ب جـ) = ٩ ك

م(Δ هـ ا ب) = م(Δ ا ب جـ) + م(Δ هـ ب جـ)

١٦ ك = م(Δ ا ب جـ) + ٩ ك

∴ م(Δ ا ب جـ) = ١٦ ك - ٩ ك = ٧ ك

$$\frac{\text{م}(\Delta \text{ا ب جـ})}{\text{م}(\Delta \text{ا ب هـ})} = \frac{7\text{ك}}{16\text{ك}} = \frac{7}{16}$$

مثال ٣ : ا ب جـ Δ حاد الزوايا فيه ق(∠ا) = ٣٠°
رسم $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{ا جـ}}$ ليقطعه في هـ ، $\overline{\text{جـ ن}} \perp \overline{\text{ا ب}}$ ليقطعه في ن أثبت أن :

(١) ا ن × ا ب = ا هـ × ا جـ

(٢) $\frac{\text{م}(\Delta \text{ا هـ ن})}{\text{م}(\Delta \text{ا ب جـ})} = \frac{3}{4}$

الحل

∵ $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ن}} \perp \overline{\text{ا ب}}$

∴ ق(ا ن̂ جـ) = ق(ا هـ̂ ب) = ٩٠°

Δ ا ن جـ ، Δ ا هـ ب

فيهما { ق(ا ن̂ جـ) = ق(ا هـ̂ ب) = ٩٠° ، ∠ا مشتركة }

∴ Δ ا ن جـ ~ Δ ا هـ ب

ومن نواتج التشابه

(١) تناسب الاضلاع

$$\frac{\text{ا ن}}{\text{ا هـ}} = \frac{\text{ن جـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{جـ ا}}{\text{ب ا}} \Leftarrow \frac{\text{ا ن}}{\text{ا هـ}} = \frac{\text{جـ ا}}{\text{ب ا}}$$

ا ن × ا ب = ا هـ × ا جـ ـــــ المطلوب أولا

∵ $\frac{\text{ا ن}}{\text{ا هـ}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ا ب}} \Leftarrow \frac{\text{ا ن}}{\text{ا جـ}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا ب}}$

Δ ا ن هـ ، Δ ا جـ ب

فيهما { $\frac{\text{ا ن}}{\text{ا جـ}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا ب}}$ ، ∠ا مشتركة }

∴ Δ ا ن هـ ~ Δ ا جـ ب

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ا هـ ن})}{\text{م}(\Delta \text{ا ب جـ})} = \left(\frac{\text{ا ن}}{\text{ا جـ}}\right)^{2}$

في الـ Δ ا ن جـ : جتا ٣٠ = $\frac{\text{ا ن}}{\text{ا جـ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ا هـ ن})}{\text{م}(\Delta \text{ا ب جـ})} = \left(\frac{\text{ا ن}}{\text{ا جـ}}\right)^{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2} = \frac{3}{4}$

مثال ٤ : ا ب جـ ء شكل رباعي دائري فيه
$\overleftrightarrow{\text{ء ا}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ = {هـ} ، رسم $\overline{\text{ء ن}}$ // $\overline{\text{ا ب}}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في ن أثبت أن :

(١) Δ هـ ء ن ~ Δ هـ جـ ء

(٢) $\frac{\text{م}(\Delta \text{هـ ء ن})}{\text{م}(\Delta \text{هـ جـ ء})} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ جـ}}$

الحل

∵ ا ب جـ ء رباعي دائري ، ∠هـ ا ب خارجه عند ا

∴ ق(هـ ا̂ ب) = ق(جـ̂) ـــــ (١)

∵ $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{ء ن}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ قاطع لهما

∴ ق(∠هـ ا ب) = ق(∠هـ ء ن) ـــ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

ق(∠هـ ء ن) = ق(جـ̂)

∴ Δ هـ ء ن ، Δ هـ جـ ء

فيهما { ق(∠هـ ء ن) = ق(جـ̂) ، ∠هـ مشتركة }

∴ Δ هـ د ن ~ Δ هـ حـ د

∴ $\frac{\text{هـ د}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{د ن}}{\text{حـ د}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ د}}$

∴ $\frac{\text{م(Δ هـ د ن)}}{\text{م(Δ هـ حـ د)}} = \left(\frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ د}}\right)^2 = \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ د}} \times \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ د}}$

$= \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ د}} \times \frac{\text{هـ د}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ حـ}}$

مثال ٥ : ا ب حـ Δ قائم الزاوية في ب رسمت المثلثات المتساوية الاضلاع ا ب س ، ب حـ ص ، ا حـ ع أثبت أن :

م(Δ ا ب س)+م(Δ ب حـ ص) = م(Δ ا حـ ع)

الحل

∵ المثلثات ا ب س ، ا حـ ع ، ب حـ ص متساوية الاضلاع

∴ Δ ا ب س ~ Δ ا حـ ص ~ ب حـ ص

∴ $\frac{\text{م(Δ ا ب س)}}{\text{م(Δ ا حـ ع)}} = \left(\frac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}}\right)^2 = \frac{\text{(ا ب)}^2}{\text{(ا حـ)}^2}$ —— (١)

∴ $\frac{\text{م(Δ ب حـ ص)}}{\text{م(Δ ا حـ ع)}} = \left(\frac{\text{ب حـ}}{\text{ا حـ}}\right)^2 = \frac{\text{(ب حـ)}^2}{\text{(ا حـ)}^2}$ —— (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

$\frac{\text{م(Δ ا ب س)}}{\text{م(Δ ا حـ ع)}} + \frac{\text{م(Δ ب حـ ص)}}{\text{م(Δ ا حـ ع)}} = \frac{\text{(ا ب)}^2}{\text{(ا حـ)}^2} + \frac{\text{(ب حـ)}^2}{\text{(ا حـ)}^2}$

$\frac{\text{م(Δ ا ب س)} + \text{م(Δ ب حـ ص)}}{\text{م(Δ ا حـ ع)}} = \frac{\text{(ا ب)}^2 + \text{(ب حـ)}^2}{\text{(ا حـ)}^2}$

∵ ا ب حـ Δ قائم في ب وبتطبيق فيثاغورث :

$\text{(ا حـ)}^2 = \text{(ا ب)}^2 + \text{(ب حـ)}^2$

∴ $\frac{\text{(ا ب)}^2 + \text{(ب حـ)}^2}{\text{(ا حـ)}^2} = ١$

∴ $\frac{\text{م(Δ ا ب س)} + \text{م(Δ ب حـ ص)}}{\text{م(Δ ا حـ ع)}} = ١$

∴ م(Δ ا ب س)+م(Δ ب حـ ص) = م(Δ ا حـ ع)

مثال ٦ : في الشكل المقابل

ا ب حـ Δ فيه س ∈ $\overline{\text{ا ب}}$ بحيث كان ا س = ٤ سم

س ب = ٦ سم ، ص ∈ $\overline{\text{ا حـ}}$ بحيث كان ا ص = ٥ سم

ص حـ = ٣ سم

(١) أثبت أن : Δ ا س ص ~ Δ ا حـ ب

(٢) الشكل س ب حـ ص رباعي دائري

(٣) إذا كان م(Δ ا س ص) = ٨ سم^2 أوجد مساحة سطح المضلع س ب حـ ص

الحل

في الـ Δ ا س ص : ا ص = ٥ سم ، ا س = ٤ سم

في الـ Δ ا ب حـ : ا ب = ١٠ سم ، ا حـ = ٨ سم

$\frac{\text{ا ص}}{\text{ا ب}} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ا س}}{\text{ا حـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ الـ Δ ا س ص ، Δ ا حـ ب

فيهما $\frac{\text{ا ص}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا س}}{\text{ا حـ}}$ ، ∠ ا مشتركة

∴ Δ ا س ص ~ Δ ا حـ ب

ومن نواتج التشابه

∴ ق(ا س̂ ص) = ق(ا حـ̂ ب)

إحداهما خارجة والاخري داخلة مقابلة للمجاورة لها

∴ س ب حـ ص شكل رباعي دائري

∵ Δ ا س ص ~ Δ ا حـ ب

∴ $\frac{\text{م(Δ ا س ص)}}{\text{م(Δ ا حـ ب)}} = \left(\frac{\text{ا س}}{\text{ا حـ}}\right)^2 = \left(\frac{١}{٢}\right)^2 = \frac{١}{٤}$

$\frac{٨}{\text{م(Δ ا حـ ب)}} = \frac{١}{٤}$

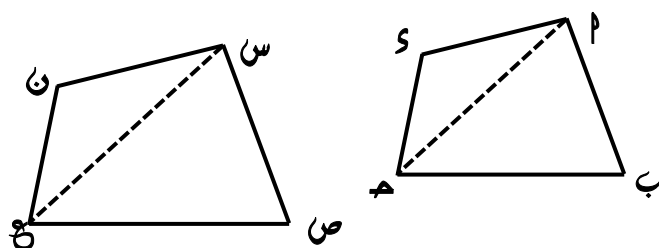
م(Δ ا حـ ب) = ٤ × ٨ = ٣٢ سم^2

∴ م(س ب حـ ص) = ٣٢ − ٨ = ٢٤ سم^2

النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين

حقيقة

المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما الى نفس العدد من المثلثات التي يشبه كلا منها نظيره

إذا كان المضلع ٢ ب ﺟ ء ~ المضلع س ص ع ن
وأمكن تقسيم المضلع الاول الى عدد من المثلثات
وأمكن تقسيم المضلع الثاني الى نفس العدد من المثلثات بنفس التناظر والترتيب للرؤوس
فإن مثلثات المضلع الاول تشبه مثلثات المضلع الثاني في الشكل المقابل

∵ المضلع ٢ ب ﺟ ء ~ المضلع س ص ع ن
∴ Δ ٢ ب ﺟ ~ Δ س ص ع
∴ Δ ٢ ء ﺟ ~ Δ س ن ع

والعكس صحيح

بشرط التناظر والترتيب

أي انه اذا وجد عدد من المثلثات المتشابهه وتم تكوين منها مضلعين بحيث كل مثلثين متشابهين يكونان في نفس الموضع في المضلعين فإن المضلعين المنشأين يكونان متشابهين

في الشكل المقابل
Δ ٢ ب ﺟ ~ Δ س ص ع ، Δ ٢ ء ﺟ ~ Δ س ن ع

لاحظ الشكل

∴ المضلع ٢ ب ﺟ ء ~ المضلع س ص ع ن

نظرية ٤

النسبة بين مساحتى سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي اي ضلعين متناظرين فيهما

إذا كان Δ ٢ ب ﺟ ~ Δ س ص ع فإن :-

(١) $\frac{م(\Delta ٢ب ﺟ)}{م(\Delta س ص ع)} = \frac{(٢ب)^٢}{(س ص)^٢} = \frac{(ب ﺟ)^٢}{(ص ع)^٢} = \frac{(٢ ﺟ)^٢}{(س ع)^٢}$

(٢) $\frac{\sqrt{مساحة \Delta ٢ب ﺟ}}{\sqrt{مساحة \Delta س ص ع}} = \frac{٢ب}{س ص} = \frac{ب ﺟ}{ص ع} = \frac{٢ ﺟ}{س ع}$

في الشكل المقابل:
إذا كان Δ ٢ ب ﺟ ~ Δ س ص ع
فإن النسبة بين مساحتي المثلثين يساوي مربع النسبة بين منصفي زاويتين متناظرتين فيهما او ارتفاعيهما او متوسطاتيهما من نفس الزاوية

س ل ، ٢ ء منصفان

$\frac{م(\Delta ٢ب ﺟ)}{م(\Delta س ص ع)} = \frac{(٢ء)^٢}{(س ل)^٢}$

س ل ، ٢ ء متوسطان

$\frac{م(\Delta ٢ب ﺟ)}{م(\Delta س ص ع)} = \frac{(٢ء)^٢}{(س ل)^٢}$

سـ ل ، ا ء ارتفاعان

$\frac{م(\Delta ا ب هـ)}{م(\Delta س ص ع)} = \frac{(ا ء)^٢}{(س ل)^٢}$

نتائج هامة

(١) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي اى ارتفاعين متناظرين فيهما

(٢) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي اي متوسطين متناظرين فيهما

(٣) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي اى منصفين متناظرين فيهما

(٤) النسبة بين مساحتي اى مثلثين غير متشابهين تساوي النسبة بين اى ضلعين فيهما × النسبة بين الارتفاعين المناظرين للضلعين

(٥) النسبة بين مساحتى مثلثين غير متشابهين ومتساويين فى القاعدة تساوي النسبة بين الارتفاعين المناظرين للقاعدتين

(٦) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين غير متشابهين ومتساويين فى الارتفاع تساوي النسبة بين القاعدتين المناظرتين للارتفاعين

(٧) النسبة بين محيطي اى مثلثين او اى مضلعين متشابهين تساوي النسبة بين طولي اى ضلعين متناظرين فيهما = معامل التشابه

مثال ١ : مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٣ أوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما وكذلك النسبة بين محيطيهما

الحل

$\frac{\text{مساحة المضلع الاول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \left(\frac{\text{طول اى ضلع فى المضلع الاول}}{\text{طول الضلع المناظر له فى المضلع الثاني}}\right)^٢$

$\frac{\text{مساحة المضلع الاول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^٢ = \frac{٤}{٩}$

$\frac{\text{محيط المضلع الاول}}{\text{محيط المضلع الثاني}} = \frac{\text{طول اى ضلع فى المضلع الاول}}{\text{طول الضلع المناظر له فى المضلع الثاني}} = \frac{٢}{٣}$

مثال ٢ : مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٥ فإذا كان مجموع مساحتي سطحيهما ١٧٠ سم٢ أوجد مساحة كلا منهما

الحل

$\frac{\text{مساحة المضلع الاول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \left(\frac{ل_١}{ل_٢}\right)^٢$

$\frac{م_١}{م_٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ = \frac{٩}{٢٥} \Leftarrow م_١ = ٩ ك \quad م_٢ = ٢٥ ك$

$\because م_١ + م_٢ = ١٧٠$

$٩ ك + ٢٥ ك = ٧٠ \Leftarrow ٣٤ ك = ٧٠$

$ك = \frac{٧٠}{٣٤} = ٥$ سم٢

مساحة الاول $= م_١ = ٩ ك = ٩ \times ٥ = ٤٥$ سم٢

مساحة الثاني $= م_٢ = ٢٥ ك = ٢٥ \times ٥ = ١٢٥$ سم٢

مثال ٣ : مضلعين متشابهين مساحة أحدهما ١٩٦ سم٢ وطول أحد اضلاعه ٤ سم وكان طول الضلع المناظر له فى المضلع الثاني = ٨ سم أوجد مساحة المضلع الثاني

الحل

$\frac{\text{مساحة المضلع الاول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \left(\frac{\text{طول اى ضلع فى المضلع الاول}}{\text{طول الضلع المناظر له فى المضلع الثاني}}\right)^٢$

$\frac{\text{مساحة المضلع الاول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \frac{١٩٦}{م_٢} = \left(\frac{٤}{٨}\right)^٢$

$\frac{١٩٦}{م_٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ = \frac{١}{٤} \Leftarrow م_٢ = ٤ \times ١٩٦ = ٧٨٤$ سم٢

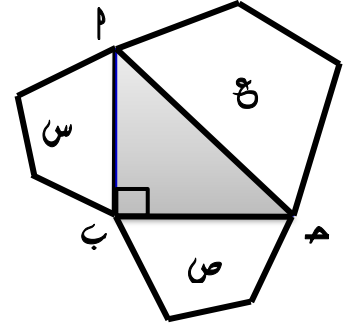
مثال ٤ : س، ص، ع مضلعات متشابهة مرسومة على اضلاع مثلث أ ب جـ

مساحة سطح المضلع س = ٢٧ سم²

مساحة سطح المضلع ص = ٤٨ سم²

مساحة سطح المضلع ع = ٧٥ سم²

أثبت أن △ أ ب جـ قائم فى ب

الحل

∵ المضلع س ~ المضلع ص ~ المضلع ع

∴ $\frac{\text{م(المضلع س)}}{\text{م(المضلع ع)}} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}\right)^2$

$\frac{27}{75} = \frac{(\text{أب})^2}{(\text{أجـ})^2}$ —— (١)

∴ $\frac{\text{م(المضلع ص)}}{\text{م(المضلع ع)}} = \left(\frac{\text{بجـ}}{\text{أجـ}}\right)^2$

$\frac{48}{75} = \frac{(\text{بجـ})^2}{(\text{أجـ})^2}$ —— (٢)

بجمع (١) ، (٢) نجد أن :

$\frac{27}{75} + \frac{48}{75} = \frac{(\text{أب})^2}{(\text{أجـ})^2} + \frac{(\text{بجـ})^2}{(\text{أجـ})^2}$

$\frac{27+48}{75} = \frac{75}{75} = \frac{(\text{أب})^2 + (\text{بجـ})^2}{(\text{أجـ})^2}$

$1 = \frac{(\text{أب})^2 + (\text{بجـ})^2}{(\text{أجـ})^2}$

$(\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2 = (\text{أ جـ})^2$

∴ **أ ب جـ قائم الزاوية فى ب**

مثال ٥ : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ رسم $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ فقطعها فى ء , رسم المثلثان المتساويا الاضلاع أ ب هـ ، جـ أ ن خارج المثلث أ ب جـ

أثبت أن :

(١) الشكل الرباعي أ ء ب هـ ~ الشكل الرباعي جـ ء أ ن

(٢) $\frac{\text{م(أ ء ب هـ)}}{\text{م(جـ ء أ ن)}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جـ ء}}$

الحل

∵ ق(∠ب أ جـ) = ٩٠ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ △ ء ب أ ~ △ ء أ جـ —— (١)

∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}}$ —— (٢)

∵ △ أ هـ ب ، △ أ جـ ن متساويا الاضلاع

∴ △ أ هـ ب ~ △ أ جـ ن —— (٣)

$\overline{\text{أ ب}}$ يناظر $\overline{\text{أ جـ}}$ —— (٤)

من (١) ، (٣) ، (٤) نجد أن :

المضلع أ ء ب هـ ~ المضلع جـ ء أ ن

ومن نواتج التشابه :

$\frac{\text{م(المضلع أ ء ب هـ)}}{\text{م(المضلع جـ ء أ ن)}} = \frac{(\text{ب ء})^2}{(\text{أ ء})^2} = \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} \times \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}}$

$= \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} \times \frac{\text{أ ء}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جـ ء}}$

تدريب ١ : فى الشكل المقابل

ا ب ﺟ ء متوازي أضلاع ، ﻫ ∈ $\overline{\text{ا ب}}$

حيث $\frac{\text{ا ﻫ}}{\text{ﻫ ب}} = \frac{٣}{٢}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء ﻫ}} \cap \overleftrightarrow{\text{ﺟ ب}} = \{\text{ن}\}$

(١) أثبت أن : △ ء ﺟ ن ~ △ ﻫ ا ء

(٢) أوجد $\frac{\text{م}(\triangle \text{ء ﺟ ن})}{\text{م}(\triangle \text{ﻫ ا ء})}$

تدريب ٢ : ا ب ﺟ ء شكل رباعي فيه

ب ﺟ = ٢٧ سم ا ب = ١٢ سم ، ا ء = ٨ سم
، ء ﺟ = ١٢ سم ا ﺟ = ١٨ سم

أثبت أن :

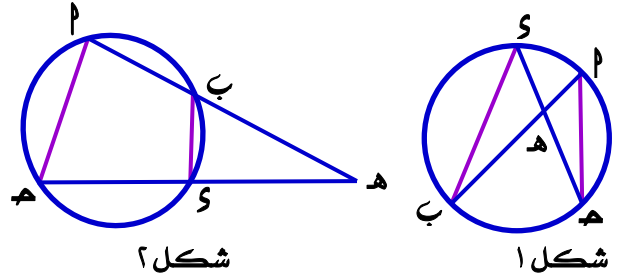
△ ب ا ﺟ ~ △ ا ء ﺟ ثم أوجد النسبة بين مساحتيهما

تطبيقات التشابه فى الدائرة

تمرين مشهور :

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ فى نقطة { هـ } داخل الدائرة او خارجها فإنه يكون
أ هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء

فى الشكل المقابل :-
أ ب ∩ حـ ء = { هـ }

شكل ١ شكل ٢

فى الشكل المقابل (١) ، (٢)
Δ هـ أ حـ ~ Δ هـ ء ب لماذا ؟

ومن نواتج التشابه :

$\frac{هـ أ}{هـ ء} = \frac{أ حـ}{ء ب} = \frac{حـ هـ}{هـ ب} \Leftarrow \frac{هـ أ}{هـ ء} = \frac{حـ هـ}{هـ ب}$

فيكون : أ هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء

أي أن :
إذا تقاطع وتران داخل الدائرة او خارجها فإن حاصل ضرب جزئي الوتر الاول يساوي حاصل ضرب جزئي الوتر الثاني

نتيجة ١

إذا رسم من نقطة خارج الدائرة قاطع ومماس للدائرة فإن حاصل ضرب طول القاطع فى جزئه الخارجي يساوي مربع طول المماس

فى الشكل المقابل
أ ب مماس للدائرة
عند النقطة ب
$\overleftrightarrow{ء حـ}$ قاطع لها في ء ، حـ

Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء ب
ومن نواتج التشابه :

$\frac{أ ب}{أ ء} = \frac{ب حـ}{ء ب} = \frac{حـ أ}{ب أ} \Leftarrow \frac{أ ب}{أ ء} = \frac{حـ أ}{ب أ}$

لذا فإنه يكون :
$(أ ب)^2 = أ ء \times أ حـ$

عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين أ ب ، حـ ء فى نقطة أخري { هـ } وكان أ هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء
فإن النقاط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة
ويكون الشكل أ ب حـ ء شكل رباعي دائري

فى الشكل المقابل :-

إذا كان أ هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء فإن النقاط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة ويكون الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

أذكر جميع الحالات التي يكون فيها الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري ؟

نتيجة ٢ ﴿ عكس نتيجة ١ ﴾

إذا كان $\overline{أب} \cap \overleftrightarrow{ء حـ} = \{ أ \}$
وكان $(أ ب)^2 = أ ء \times أ حـ$ فإن $\overline{أ ب}$ يكون مماسا للدائرة المارة بالنقط ب ، حـ ، ء

فى الشكل المقابل :

إذا كان $(أ ب)^2 = أ حـ \times أ ء$
فإن : أ ب يكون مماسا للدائرة المارة برؤوس المثلث ب حـ ء

أذكر جميع الحالات التي يكون فيها أ ب مماسا للدائرة المارة برؤوس المثلث ؟

مثال ١ : Δ ا ب حـ فيه ا ب = ١٥ سم ، ا حـ = ١٢ سم ، ء ∋ ا ب حيث ا ء = ٤ سم ، هـ ∋ ا حـ حيث ا هـ = ٥ سم أثبت أن : الشكل ء ب حـ هـ رباعي دائري

الحل

∵ ب ء ∩ حـ هـ = { ا }

ا ء × ا ب = ٤ × ١٥ = ٦٠ سم²

ا هـ × ا حـ = ٥ × ١٢ = ٦٠ سم²

∴ ا ء × ا ب = ا هـ × ا حـ

∴ ء ب حـ هـ رباعي دائري

يمكن اثبات الشكل باستخدام التشابه حيث

Δ ا ء هـ ~ Δ ا حـ ب لماذا ؟

مثال ٢ : فى الشكل المقابل

ا ب ∩ حـ ء = { م } ، م ا = ٤ سم ، م حـ = ٣ سم ، م ء = ٢ سم أوجد طول ب م

الحل

∵ ا ب ∩ حـ ء = { م } ، م داخل الدائرة

∴ ب م × م ا = حـ م × م ء

∴ س × ٤ = ٣ × ٢

⟸ ٤ س = ٦ ⟸ س = $\frac{٦}{٤}$ = ١,٥ سم

مثال ٣ : فى الشكل المقابل

ا ب ∩ حـ ء = { م } ، وإذا كان $\frac{م ا}{م ب} = \frac{٤}{٣}$ ، م ء = ٤ سم ، م حـ = ٩ سم

أوجد طول ب م

الحل

∵ $\frac{م ا}{م ب} = \frac{٤}{٣}$ ⟸ م ا = ٤ ك ، م ب = ٣ ك

∵ ا ب ∩ حـ ء = { م } ، م داخل الدائرة

∴ ب م × م ا = حـ م × م ء

∴ ٣ك × ٤ ك = ٤ × ٩

١٢ ك² = ٣٦

⟸ ك² = $\frac{٣٦}{١٢}$ = ٣ ⟸ ك = $\sqrt{٣}$

م ب = ٣ $\sqrt{٣}$ ، م ا = ٤ $\sqrt{٣}$

مثال ٤ : ا ب ، حـ ء وتران فى دائرة متقاطعان فى م فإذا كان م ا = ٦ سم ، م ب = ٢,٥ سم ، حـ ء = ٨ سم ، أوجد حـ م ، م ء

الحل

حـ م + م ء = ٨

حـ م = ٨ - م ء

∵ ا ب ∩ حـ ء = { م } ، م داخل الدائرة

∴ حـ م × م ء = ب م × م ا

(٨ - م ء) × م ء = ٢,٥ × ٦

٨ م ء - (م ء)² = ١٥

(م ء)² − ٨(م ء) + ١٥ = ٠

(م ء - ٣) (م ء - ٥) = ٠

م ء = ٣ سم أ، م ء = ٥ سم

حـ م = ٨ − ٣ = ٥ سم حـ م = ٨ − ٥ = ٣ سم

مثال ٥ : فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{هـ ى} = \{هـ\}$ ،

أ ب = ٥ سم

هـ ى = ٩ سم ،

ب هـ = ٤ سم

أوجد طول هـ ى

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{هـ ى} = \{هـ\}$ ، هـ خارج الدائرة

∴ هـ ى × هـ جـ = هـ ب × هـ أ

وبفرض أن هـ ى = س

⟸ هـ ى × هـ جـ = هـ ب × هـ أ

س (س + ٩) = ٤ × (٤ + ٥)

س^2 + ٩ س = ٣٦

س^2 + ٩ س − ٣٦ = ٠

(س − ١٢) (س + ٣) = ٠

س = ١٢ ، س = - ٣ مرفوضة

∴ هـ ى = ١٢ سم

مثال ٦ : أ نقطة خارج الدائرة ، أ ب مماس للدائرة عند ب ، أ جـ قاطع للدائرة عند جـ ، ى فإذا كان أ ى = ٩ سم ، ى جـ = ١٦ سم أوجد طول $\overline{أب}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند ب ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ قاطع للدائرة عند جـ ، ى

∴ (أ ب)^2 = أ جـ × أ ى

(أ ب)^2 = ٩ × (٩ + ١٦)

(أ ب)^2 = ٩ × ٢٥ = ٢٢٥

أ ب = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

مثال ٧ : دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب رسم مماس مشترك يمسهما فى س ، ص فإذا كان

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{س ص} = \{جـ\}$

أثبت أن : جـ منتصف $\overline{س ص}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{جـ س}$ مماس للدائرة م ، $\overleftrightarrow{جـ ب}$ قاطع لها عند أ ، ب

∴ (جـ س)^2 = جـ أ × جـ ب —— (١)

∵ $\overleftrightarrow{جـ ص}$ مماس للدائرة ن ، $\overleftrightarrow{جـ ب}$ قاطع لها عند أ ، ب

∴ (جـ ص)^2 = جـ أ × جـ ب —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

(جـ س)^2 = (جـ ص)^2

جـ س = جـ ص ∴ جـ منتصف $\overline{س ص}$

مثال ٨ : أ نقطة خارج الدائرة م ، رسم من أ قطعتان مماستان تمسانها عند ب ، جـ ورسمت $\overline{أ م}$ فقطعت $\overline{ب جـ}$ فى ى ، ورسمت $\overline{أ هـ}$ قاطعة للدائرة فى و ، هـ

أثبت أن : هـ م ى و رباعي دائري

الحل

العمل : نرسم $\overline{ب م}$ نصف قطر

البرهان :

∵ أ ب مماس للدائرة م عند ب ، $\overline{م ب}$ نصف قطر

∴ $\overline{أب} \perp \overline{م ب}$ ، ق(م $\hat{ب}$ أ) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسين عند ب ، جـ ، $\overline{ب جـ}$ وتر التماس

∴ $\overline{أ م} \perp \overline{ب جـ}$

∵ ق(م $\hat{ب}$ أ) = ٩٠° ، $\overline{ب ى} \perp \overline{م أ}$

∴ Δ ب م أ ~ Δ ى ب أ

∴ (أ ب)^2 = أ ى × أ م ———— (١)

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م ، $\overline{\text{أ هـ}}$ قاطع لها فى و ، هـ

∴ (أ ب)^{2} = أ و × أ هـ ——— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

(أ ب)^{2} = أ ى × أ م = أ و × أ هـ

∴ أ ى × أ م = أ و × أ هـ

∴ ى م هـ و رباعي دائري

مثال ٩ : أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة ، $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ب أ جـ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ى ويقطع الدائرة فى هـ
أثبت أن :
(١) Δ أ جـ ى ~ Δ أ هـ ب
(٢) أ ب . أ جـ = ب ى . ى جـ + (أ ى)^{2}

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ب أ جـ ∴ ق(ب أ̂ هـ)=ق(جـ أ ى)

∵ ∠جـ ، ∠هـ محيطيتان مرسومتان على القوس $\frown{\text{أ ب}}$

∴ ق(∠هـ) = ق(∠جـ)

∴ Δ أ ب هـ ، Δ أ ى جـ

ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ جـ أ ى)

فيهما ق(∠هـ) = ق(∠جـ)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ أ ى جـ ⟸ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ى}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{هـ أ}}{\text{جـ أ}}$

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ى}} = \frac{\text{هـ أ}}{\text{جـ أ}}$ ⟸ أ ى × أ هـ = أ ب × أ جـ

أ ى × (أ ى + ى هـ) = أ ب × أ جـ

(أ ى)^{2} + أ ى × ى هـ = أ ب × أ جـ ——— (١)

∵ $\overline{\text{أ هـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب جـ}}$ = { ى }

∴ ب ى × ى جـ = أ ى × ى هـ ——— (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

(أ ى)^{2} + ب ى × ى جـ = أ ب × أ جـ

التناسب

نظرية ١

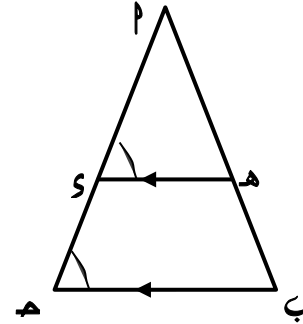
إذا رسم مستقيم يوازي احد اضلاع المثلث ويقطع الضلعين الاخرين فإنه يقسمهما الى قطع اطوالها متناسبة

فى الشكل المقابل :-

إذا كان $\overline{هـ ء} // \overline{ب جـ}$ فإن :

(١) $\frac{أ هـ}{أ ب} = \frac{أ ء}{أ جـ} = \frac{هـ ء}{ب جـ}$

(٢) $\frac{أ هـ}{هـ ب} = \frac{أ ء}{ء جـ}$

(٣) $\frac{هـ ب}{أ ب} = \frac{ء جـ}{أ جـ}$

نتيجة :-

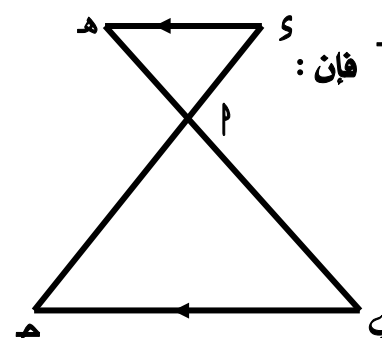
إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازي ضلعا من اضلاع مثلث وليكن $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ في هـ ، ء على الترتيب فإن

فى الشكل المقابل :-

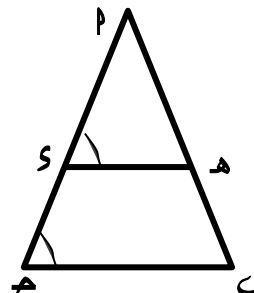
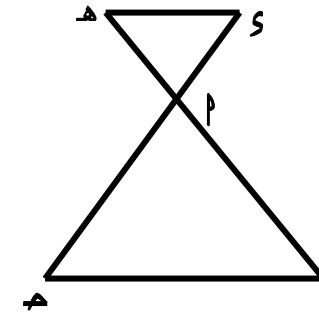
إذا كان $\overline{هـ ء} // \overline{ب جـ}$ فإن :

(١) $\frac{أ هـ}{أ ب} = \frac{أ ء}{أ جـ} = \frac{هـ ء}{ب جـ}$

(٢) $\frac{أ هـ}{هـ ب} = \frac{أ ء}{ء جـ}$

(٣) $\frac{هـ ب}{أ ب} = \frac{ء جـ}{أ جـ}$

عكس نظرية

إذا قطع مستقيم ضلعين فى مثلث وقسمهما من الداخل او الخارج الى قطع اطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث

فى الاشكال الاتية :

إذا كان :

(١) $\frac{أ هـ}{أ ب} = \frac{أ ء}{أ جـ} = \frac{هـ ء}{ب جـ}$ أو (٢) $\frac{أ هـ}{هـ ب} = \frac{أ ء}{ء جـ}$ أو

(٣) $\frac{هـ ب}{أ ب} = \frac{ء جـ}{أ جـ}$

⟸ فإن $\overline{هـ ء} // \overline{ب جـ}$

وهذه النظرية تأتى كنتيجة لتشابه المثلثين أ هـ ء ، أ ب جـ

نظرية تاليس العامة

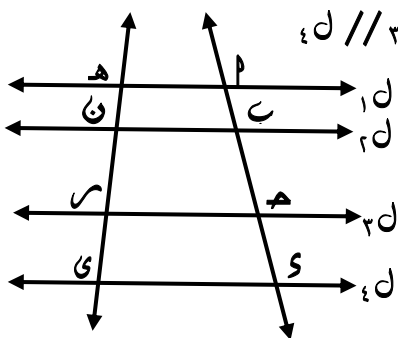
إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية ، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع اطوال القطع الناتجة على القاطع الاخر

فى الشكل المقابل :-

إذا كان $ل_١ // ل_٢ // ل_٣ // ل_٤$

فإن : -

$\frac{أ ب}{هـ ى} = \frac{ب جـ}{ن س} = \frac{جـ ء}{س ى}$

$= \frac{أ جـ}{هـ س} = \frac{ب ء}{ن ى} = \frac{أ ء}{هـ ى}$

نظرية تاليس الخاصة

إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية و كانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمات المتوازية متساوية في الطول فأن الأجزاء المحصورة بينها لأي قاطع آخر تكون متساوية في الطول أيضا

فى الشكل المقابل :-

إذا كان :

$ل_١ // ل_٢ // ل_٣ // ل_٤$

أ ب = ب جـ = جـ ء

فإن :

هـ ن = ن س = س ى

إذا كان :

$ل_١ // ل_٢ // ل_٣ // ل_٤$

$\frac{هـ ب}{أ ب} = \frac{ب س}{ب جـ} = \frac{س ى}{جـ ء}$

مثال ١ : فى الشكل المقابل:

Δ أ ب جـ فيه
، د هـ // ب جـ ،
أ د = ٢ سم
د ب = ٤ سم ،
أ هـ = ٣ سم
أوجد طول هـ جـ

الحل

∵ د هـ // ب جـ ∴ أ هـ / هـ جـ = أ د / د ب

٣ / هـ جـ = ٢ / ٤ ⟸ هـ جـ = (٣ × ٤) / ٢ = ٦ سم

مثال ٢ : فى الشكل المقابل

أ ب جـ Δ قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٩ سم ،
ب جـ = ١٢ سم ، د ∈ أ ب بحيث أ د = ٣ سم
رسم د هـ // ب جـ فقطع أ جـ
فى هـ ثم رسم د ن // أ جـ
فقطع ب جـ فى ن
أوجد طول كلا من
أ جـ ، أ هـ ، ب ن

الحل

∵ أ ب جـ قائم فى ب ومن فيثاغورث

(أ جـ)² = (أ ب)² + (ب جـ)²

أ جـ = √(٩² + ١٢²) = √(٨١ + ١٤٤) = √٢٢٥ = ١٥

∵ هـ د // ب جـ ∴ أ هـ / أ جـ = أ د / أ ب

⟸ أ هـ / ١٥ = ٣ / ٩ ⟸ أ هـ = (٣ × ١٥) / ٩ = ٥ سم

∵ د ن // أ جـ ∴ ب ن / ب جـ = ب د / ب أ

⟸ ب ن / ١٢ = ٦ / ٩ ⟸ ب ن = (١٢ × ٦) / ٩ = ٨ سم

مثال ٣ فى الشكل المقابل

أ ب // جـ د ، أ د يقطع
ب جـ فى هـ ، أ د = ١٤ سم
، ب هـ = ٤ سم ،
جـ هـ = ٣ سم
أوجد طول
أ هـ ، هـ د

الحل

∵ جـ د // أ ب ∴ هـ د / د أ = هـ جـ / جـ ب

هـ د / ١٤ = ٣ / ٧ ⟸ ∴ هـ د = (١٤ × ٣) / ٧ = ٦ سم

∴ أ هـ = ١٤ − ٦ = ٨ سم

مثال ٤ : فى الشكل المقابل

أ ب جـ Δ فيه د ∈ أ ب ،
هـ ∈ أ جـ بحيث أ د = ٣/٥ أ ب
، هـ جـ = ٢/٣ أ هـ
أثبت أن
د هـ // ب جـ

الحل

∵ أ د = ٣/٥ أ ب ∴ أ د / أ ب = ٣ / ٥ —— (١)

∵ جـ هـ = ٢/٣ أ هـ ∴ أ هـ / أ جـ = ٣ / (٢ + ٣) = ٣ / ٥ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

∴ أ د / أ ب = أ هـ / أ جـ ∴ هـ د // جـ ب

مثال ٥ : فى الشكل المقابل

أ ب جـ د رباعي ، ع ∈ ب د
، رسم ع س // أ د ،
د جـ // ع ص
أثبت أن :
س ص // أ جـ

الحل

في الـ Δ أ ب ى :

∵ س ع // أ ى ∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ب ى}}$ —— (١)

في الـ Δ ى ب هـ :

∵ ع ص // ى هـ ∴ $\frac{\text{ب ص}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ب ى}}$ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

⟸ $\frac{\text{ب س}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{ب هـ}}$ ∴ س ص // أ هـ

مثال ٦ : في الشكل المقابل

ى هـ // أ جـ ، ن م // أ ب ، ب هـ = ن جـ

أثبت أن : ى م // ب جـ

الحل

∵ ى هـ // أ جـ ∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ب أ}}$ —— (١)

∵ ن م // أ ب ∴ $\frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{جـ أ}}$ —— (٢)

∵ ب هـ = ن جـ ∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ ب}}$

∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{جـ أ}}$ ∴ ى م // ب جـ

مثال ٧ : أ ب جـ Δ فيه ى ∈ ب جـ بحيث

ب ى = $\frac{1}{3}$ ب جـ ، هـ ∈ أ ى بحيث أ هـ = $\frac{1}{3}$ أ ى ، رسم جـ هـ فقطع أ ب في س رسم ى ص // جـ هـ فقطع أ ب في ص أثبت أن : أ س = ب ص

الحل

في الـ Δ أ ص ى :

∵ س هـ // ص ى ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ص}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ى}} = \frac{1}{2}$ —— (١)

في الـ Δ س ب جـ :

∵ ص ى // س جـ ∴ $\frac{\text{ب ص}}{\text{ص س}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{1}{2}$ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{س ص}}$ ⟸ أ س = ب ص

مثال ٨ : في الشكل المقابل

أ ب جـ Δ فيه ى س // جـ أ ، ى ص // ب أ

أثبت أن : $\frac{\text{أ س . أ ص}}{\text{ب أ . جـ أ}} = \frac{\text{ب ى . ى جـ}}{(\text{ب ى} + \text{ى جـ})^2}$

الحل

∵ ى س // جـ أ ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{جـ ى}}{\text{جـ ب}}$ —— (١)

∵ ى ص // ب أ ∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ب جـ}}$ —— (٢)

بضرب (١) ، (٢) نجد أن :

⟸ $\frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}} \times \frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{جـ ى}}{\text{جـ ب}} \times \frac{\text{ب ى}}{\text{ب جـ}}$

$\frac{\text{أ س . أ ص}}{\text{ب أ . جـ أ}} = \frac{\text{جـ ى . ب ى}}{(\text{ب جـ})^2}$ ولكن ب جـ = ب ى + ى جـ

∴ $\frac{\text{أ س . أ ص}}{\text{ب أ . جـ أ}} = \frac{\text{ب ى . ى جـ}}{(\text{ب ى} + \text{ى جـ})^2}$

مثال ٩ : فى الشكل المقابل

أ ب // ء هـ // هـ ن

ب ء = ٣ سم

ء ن = ٦ سم

أ هـ = ١٢ سم

أوجد طول هـ هـ

الحل

∵ أ ب // ء هـ // هـ ن ∴ هـ هـ / ء ن = أ هـ / ب ن (تاليس)

⟸ هـ هـ / ٦ = ١٢ / ٩ ⟸ هـ هـ = (٦×١٢) / ٩ = ٨ سم

مثال ١٠ : فى الشكل المقابل

هـ ن // ب هـ // أ ء

أ م = ٤ سم ، ب هـ = ٦ سم

ء م = ٦ سم ، ء هـ = ٥ سم

أوجد طول أ ب ، هـ ن

الحل

∵ هـ ن // ب هـ // أ ء

∴ هـ ن / ب هـ = ء هـ / أ ب = ء م / أ م (تاليس)

⟸ هـ ن / ٦ = ٥ / أ ب = ٦ / ٤

∴ هـ ن = (٦×٦) / ٤ = ٩ سم ، أ ب = (٥×٤) / ٦ = ٣ ١/٣ سم

مثال ١١ : أ ب هـ Δ فيه ء ∈ أ ب ،

رسم ء هـ // ب هـ ويقطع أ هـ فى هـ ،

رسم ء ن // ب هـ ويقطع أ هـ فى ن

أثبت أن : (أ هـ)^٢ = أ هـ × أ ن

الحل

∵ ء هـ // ب هـ ∴ أ هـ / أ هـ = أ ء / أ ب ——— (١)

∵ ء ن // ب هـ ∴ أ ن / أ هـ = أ ء / أ ب ——— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

أ هـ / أ هـ = أ ن / أ هـ ⟸ (أ هـ)^٢ = أ هـ × أ ن

مثال ١٢ : أ ب هـ Δ ، ن منتصف ب هـ ، فرضت

نقطة على أ ن (ع) رسم ع س // أ ب

ويقطع ب هـ فى س ، ورسم ع ص // أ هـ

ويقطع ب هـ فى ص

(١) أثبت أن : س ن = ص ن

(٢) وإذا كانت ع هي نقطة تلاقى متوسطات المثلث

أ ب هـ أثبت أن س ص = ١/٣ ب هـ

الحل

∵ ن منتصف ب هـ ∴ ب ن = ن هـ ——— (١)

∵ ع س // أ ب ∴ ن س / ن ب = ن ع / ن أ ——— (٢)

∵ ع ص // أ هـ ∴ ن ص / ن هـ = ن ع / ن أ ——— (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نجد أن :

$\frac{ن س}{ن ب} = \frac{ن ص}{ن هـ} \Leftarrow ن س = ن ص$

وإذا كانت ع نقطة تقاطع المتوسطات

فإنه من (٢) ، (٣) :

☺ $\frac{ن س}{ن ب} = \frac{ن ع}{ن أ} = \frac{١}{٣} \Leftarrow ن س = \frac{١}{٣} ن ب$ —— (٤)

☺ $\frac{ن ص}{ن هـ} = \frac{ن ع}{ن أ} = \frac{١}{٣} \Leftarrow ن س = \frac{١}{٣} ن هـ$ —— (٥)

بجمع (٤) ، (٥) :

$ن س + ن ص = \frac{١}{٣} ن ب + \frac{١}{٣} ن هـ$

$= \frac{١}{٣} (ن ب + ن هـ)$

$\therefore س ص = \frac{١}{٣} ب هـ$

مثال ١٣ : فى الشكل المقابل

$\overline{هـ ء} // \overline{أ ب} // \overline{هـ ن}$

م ن = ٧,٥ سم ، م ب = ٦ سم

ب ء = ٤ سم ، أ م = ٥ سم

أوجد طول

$\overline{أ هـ}$ ، $\overline{م هـ}$

الحل

$\because \overline{هـ ء} // \overline{أ ب} // \overline{هـ ن}$

$\therefore \frac{أ هـ}{ب ء} = \frac{أ م}{ب م} = \frac{م ن}{م هـ}$ (تاليس)

$\Leftarrow \frac{أ هـ}{٤} = \frac{٥}{٦} = \frac{٧,٥}{م هـ}$

☺ $أ هـ = \frac{٤ \times ٥}{٦} = ٣ \frac{١}{٣}$ سم

☺ $م هـ = \frac{٧,٥ \times ٦}{٥} = ٩$ سم

منصفا الزاوية والاجزاء المتناسبة

نظرية ٣ :

إذا نصفت زاوية رأس المثلث أو الزاوية الخارجه له عند هذا الرأس فإن المنصف يقسم القاعدة من الداخل او الخارج الى جزأين النسبة بينهما تساوي النسبة بين الضلعين الاخرين

في الشكل المقابل :-

إذا كان $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠أ فإن :-

$\frac{ب أ}{هـ أ} = \frac{ب ء}{ء هـ}$ أو

ب أ × ء هـ = أ هـ × ب ء

في الشكل المقابل :-

إذا كان $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠أ

فإن :-

$\frac{ب أ}{هـ أ} = \frac{ب ء}{ء هـ}$ أو

ب أ × ء هـ = أ هـ × ب ء

إثبات النظرية

المعطيات : أ ب هـ Δ ،

$\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠أ من الداخل

المطلوب : $\frac{ب أ}{هـ أ} = \frac{ب ء}{ء هـ}$

العمل : نرسم $\overleftrightarrow{هـ هـ}$ // $\overleftrightarrow{أ ء}$

ويقطع $\overleftrightarrow{ب أ}$ في هـ

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ب أ هـ ∴ ∠١ ≡ ∠٢ ـــ (١)

∵ $\overleftrightarrow{أ ء}$ // $\overleftrightarrow{هـ هـ}$ ، أ هـ ، أ هـ قواطع لهما

∴ ∠٢ ≡ ∠٣ بالتبادل ـ (٢)

∴ ∠١ ≡ ∠٤ بالتناظر ـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نجد أن :

∠٣ ≡ ∠٤ ∴ أ هـ = أ هـ

∵ $\overleftrightarrow{أ ء}$ // $\overleftrightarrow{هـ هـ}$ ∴ $\frac{ب أ}{أ هـ} = \frac{ب ء}{ء هـ}$ ⟸ $\frac{ب أ}{أ هـ} = \frac{ب ء}{ء هـ}$

ملاحظات مهمة :

(١) إذا كان أ ب = أ هـ

وكان $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف

∠أ من الداخل فإن:

$\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف القاعدة

ويكون عموديا عليها

أي يكون متوسط في المثلث ويكون ارتفاع ايضا

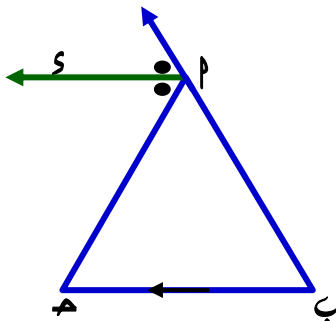
(٢) إذا كان أ ب < أ هـ فإن ⟸ ب ء < ء هـ

(٣) وإذا كان أ ب > أ هـ فإن ⟸ ب ء > ء هـ

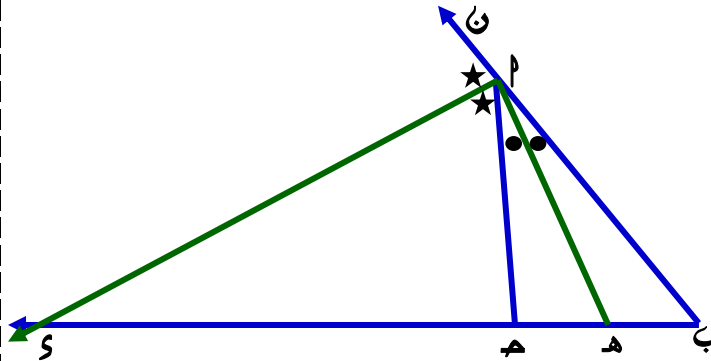
(٤) إذا كان أ ب = أ هـ

وكان $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠أ

من الخارج

فإن : $\overleftrightarrow{أ ء}$ // ب هـ

(٥) أ ب ≠ أ هـ دائما

أي انه دائما في حالة المنصف من الخارج يكون الضلع الذي يقع في جهة المنصف هو الاصغر

(٦) المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية رأس المثلث يكونان متعامدان

في الشكل السابق :

∵ $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠أ من الداخل

∴ ق(ب $\hat{أ}$ هـ) = ق(هـ $\hat{أ}$ هـ) = س

∵ $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠أ من الخارج

∴ ق (هـ $\hat{أ}$ ء) = ق(ء $\hat{أ}$ ن) = ص

∵ أ ∈ $\overline{ب ن}$ ∴ ق(ب $\hat{أ}$ ن) = ١٨٠

س + س + ص + ص = ١٨٠ ⟸ ٢ س + ٢ ص = ١٨٠

⟸ س + ص = ٩٠ ∴ $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overline{أ ء}$

مثال ١ : فى الشكل المقابل

أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٥ سم
أ جـ = ٦ سم
أى ينصف ∠ أ من الداخل
أوجد : ب ى ، ى جـ

الحل

∵ أى ينصف ∠ ب أ جـ ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$

ب ى + ى جـ = ٥ ⟸ ى جـ = ٥ − ب ى

$\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$ ⟸ $\frac{٤}{٦} = \frac{\text{ب ى}}{\text{٥ − ب ى}}$

⟸ ٦ ب ى = ٤ (٥ − ب ى)

٦ ب ى = ٢٠ - ٤ ب ى

٦ ب ى + ٤ ب ى = ٢٠ ⟸ ١٠ ب ى = ٢٠

ب ى = $\frac{٢٠}{١٠}$ = ٢ سم

ى جـ = ٥ − ٢ = ٣ سم

مثال ٢ : فى الشكل المقابل

أى ينصف ∠ أ من الخارج
أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ٨ سم
ب جـ = ٥ سم
أوجد طول ب ى

الحل

∵ أى ينصف ∠ أ من الخارج ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$

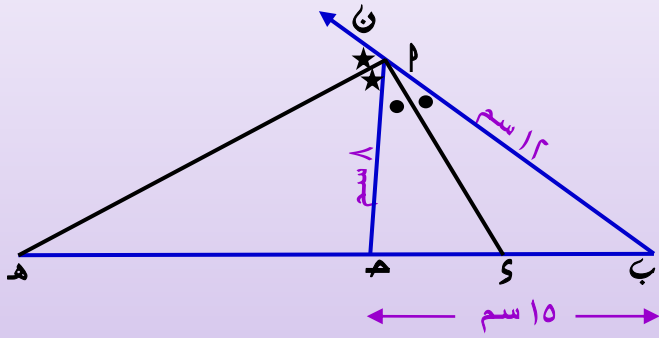
ى جـ = ب ى + ب جـ ⟸ ى جـ = ب ى + ٥

$\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$ ⟸ $\frac{٦}{٨} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ب ى + ٥}}$

٨ ب ى = ٦ ب ى + ٣٠

⟸ ٨ ب ى − ٦ ب ى = ٣٠

٢ ب ى = ٣٠ ⟸ ب ى = $\frac{٣٠}{٢}$ = ١٥ سم

مثال ٣ : فى الشكل المقابل

أى ، أهـ منصفان ∠ أ من الداخل والخارج على الترتيب وكان أ ب = ١٢ سم ، أ جـ = ٨ سم ، ب جـ = ١٥ سم ، أوجد طول ب ى ، ى هـ

الحل

∵ أى ينصف ∠ ب أ جـ من الداخل ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$

ب ى + ى جـ = ١٥ ⟸ ى جـ = ١٥ − ب ى

$\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$ ⟸ $\frac{١٢}{٨} = \frac{\text{ب ى}}{\text{١٥ − ب ى}}$

⟸ ٨ ب ى = ١٢ (١٥ − ب ى)

٨ ب ى = ١٨٠ − ١٢ ب ى

٨ ب ى + ١٢ ب ى = ١٨٠

⟸ ٢٠ ب ى = ١٨٠

⟸ ب ى = $\frac{١٨٠}{٢٠}$ = ٩ سم

∴ جـ ى = ١٥ − ٩ = ٦ سم

∵ أى ينصف ∠ أ من الخارج ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

ب هـ = ١٥ + هـ جـ

$\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ⟸ $\frac{١٢}{٨} = \frac{\text{١٥ + هـ جـ}}{\text{هـ جـ}}$

١٢ هـ جـ = ١٢٠ + ٨ هـ جـ

١٢ هـ جـ − ٨ هـ جـ = ١٢٠

٤ هـ جـ = ١٢٠ ⟸ هـ جـ = $\frac{١٢٠}{٤}$ = ٣٠ سم

∴ هـ جـ = ٣٠ سم

∴ ى هـ = ى جـ + جـ هـ = ٦ + ٣٠ = ٣٦ سم

مثال ٤ : أ ب جـ د شكل رباعي فيه ب جـ = جـ د
رسم $\overline{\text{جـ أ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ ، نصفت ∠ أ جـ د بمنصف لاقي أ د في ص
أثبت أن $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب د}}$

الحل

∵ $\overleftarrow{\text{جـ س}}$ ينصف ∠ ب جـ أ ∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{ب س}}{\text{س أ}}$ —— (١)

∵ $\overleftarrow{\text{جـ ص}}$ ينصف ∠ د جـ أ ∴ $\frac{\text{د جـ}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{د ص}}{\text{ص أ}}$ —— (٢)

∵ ب جـ = جـ د ∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س أ}} = \frac{\text{د ص}}{\text{ص أ}}$

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب د}}$

مثال ٥ : فى الشكل المقابل

Δ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، د ∋ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ حيث ب جـ = جـ د ، $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ينصف ∠ أ ب جـ ، $\overleftarrow{\text{جـ ص}}$ ينصف ∠ أ جـ د
أثبت أن $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$

الحل

∵ $\overleftarrow{\text{ب س}}$ ينصف ∠ أ ب جـ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{س جـ}}$ —— (١)

∵ $\overleftarrow{\text{جـ ص}}$ ينصف ∠ أ جـ د ∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص د}}$ —— (٢)

∵ أ ب = أ جـ ، ب جـ = جـ د ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ د}}$

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س جـ}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص د}}$

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$

مثال ٦ : ل م ن Δ فيه ك منتصف $\overline{\text{م ن}}$ ، $\overleftarrow{\text{م س}}$ ينصف ∠ ل م ن ويقطع ل $\overline{\text{ك}}$ فى س
أثبت أن :
م ل × س ك = ك ن × ل س

الحل

∵ $\overleftarrow{\text{م س}}$ ينصف ∠ ل م ن ∴ $\frac{\text{ل م}}{\text{م ك}} = \frac{\text{ل س}}{\text{س ك}}$

∵ ك منتصف $\overline{\text{م ن}}$ ∴ م ك = ك ن

∴ $\frac{\text{ل م}}{\text{ك ن}} = \frac{\text{ل س}}{\text{س ك}}$

∴ ل م × س ك = ك ن × ل س

مثال ٧ : فى الشكل المقابل

$\overline{\text{د جـ}}$ قطر فى الدائرة ن ، م ∋ للدائرة ،
$\overleftarrow{\text{م جـ}}$ ينصف ∠ ب م أ
أثبت أن : $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د أ}}$

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{م جـ}}$ ينصف ∠ ب م أ ∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب م}}{\text{م أ}}$ —— (١)

∵ $\overline{\text{ء جـ}}$ قطر في الدائرة ن ، ∠ء م جـ محيطية في نصف دائرة

∴ ق(∠ء م̂ جـ) = ٩٠° ، $\overline{\text{ء م}} \perp \overline{\text{م جـ}}$

∵ $\overrightarrow{\text{م جـ}}$ ينصف ∠م من الداخل ، $\overline{\text{ء م}} \perp \overline{\text{م جـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ء}}$ ينصف ∠م من الخارج

∴ $\frac{\text{ب م}}{\text{م أ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء أ}}$ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}}$

مثال ٨ : في الشكل المقابل

$\overline{\text{ء هـ}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$ ،

$\overrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ء أ هـ

أثبت أن

(١) $\frac{\text{ء س}}{\text{س هـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{هـ جـ}}$

(٢) $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ء س})}{\text{م}(\triangle \text{أ هـ س})} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

الحل

∵ $\overline{\text{ء هـ}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{هـ جـ}}$ —— (١)

∵ $\overrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ء أ هـ ∴ $\frac{\text{ء أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ء س}}{\text{س هـ}}$ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $\frac{\text{ء س}}{\text{س هـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{هـ جـ}}$

مثال ٩ : أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة فيه أ ب = أ جـ ، رسم المماس $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ من النقطة ب على الدائرة فلاقي $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ في ء

أثبت أن : ء ب × أ ب = ء أ × ب جـ

الحل

∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(جـ̂) —— (١)

∵ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس ، $\overline{\text{ب أ}}$ وتر

∴ ق(∠ء ب أ) = ق(جـ̂) —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن

ق(∠أ ب جـ) = ق(∠ء ب أ)

∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ تنصف ∠ ء ب جـ

∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{أ جـ}}$

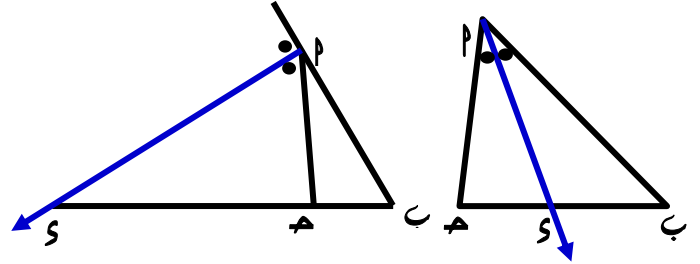
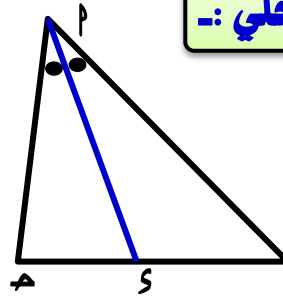
∵ أ ب = أ جـ ∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{أ ب}}$

∴ ء ب × أ ب = ب جـ × ء أ

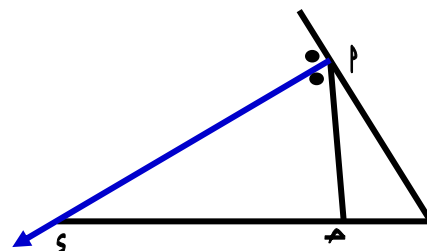
عكس نظرية

إذا قسمت نقطة قاعدة مثلث من الداخل او الخارج الى جزأين النسبة بينهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الاخرين فإن المستقيم المار برأس المثلث وهذه النقطة ينصف زاوية الرأس من الداخل او الخارج

في الشكل المقابل :-

إذا كان : $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بد}}{\text{دجـ}}$ أو أب × دجـ = أجـ × ب د

فإن : $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ يكون منصفا لـ ∠ أ من الداخل او الخارج حسب نوع التقسيم

(١) طول المنصف الداخلي :-

فى الشكل المقابل :
إذا كان أد ينصف
∠ من الداخل فإن :
طول المنصف الداخلي
أد يتعين من العلاقة

$$\text{أد} = \sqrt{\text{أب} \times \text{أجـ} - \text{ب د} \times \text{د جـ}}$$

(٢) طول المنصف الخارجي :-

فى الشكل المقابل :-
إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف
∠ أ من الخارج
فإن :
طول المنصف الخارجي
أد يتعين من العلاقة

$$\text{أد} = \sqrt{\text{ب د} \times \text{د جـ} - \text{أب} \times \text{أجـ}}$$

أثبات طول المنصف الداخلي

فى الشكل المقابل أ ب جـ Δ فيه $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠ب أ جـ من الداخل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠ب أ جـ ∴ ق(∠ب أ هـ) = ق(∠جـ أ د)

∵ ∠جـ ، ∠هـ محيطيتان مرسومتان على القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$

∴ ق(∠جـ) = ق(∠هـ)

∴ Δ أ ب هـ ، Δ أ د جـ

ق(∠ب أ هـ) = ق(∠جـ أ د)

فيهما ق(∠هـ) = ق(∠جـ)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ أ د جـ ⟸ $\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$

$\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$ ⟸ أد × أهـ = أب × أجـ

أد × (أد + د هـ) = أب × أجـ

(أد)² + أد × د هـ = أب × أجـ —— (١)

∵ $\overline{\text{أهـ}} \cap \overline{\text{ب جـ}}$ = { د }

∴ ب د × د جـ = أد × د هـ —— (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

(أد)² + ب د × د جـ = أب × أجـ

(أد)² = أب × أجـ - ب د × د جـ

$$\text{أد} = \sqrt{\text{أب} \times \text{أجـ} - \text{ب د} \times \text{د جـ}}$$

حقيقة هندسية

منصفات زوايا اي مثلث تتقاطع جميعا فى نقطة واحدة

فى الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ ،

$\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ ب

$\overleftrightarrow{\text{أء}} \cap \overleftrightarrow{\text{ب هـ}} = \{\text{م}\}$

∵ م ∈ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ينصف ∠ حـ

مثال ١ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٩ سم ، حـ ء = ٩ سم ، أ ء = ٤ سم ، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ أ ويقطع ب ء فى هـ

(١) أوجد قيمة $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}}$

(٢) أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف ∠ ب حـ ء

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ أ من الداخل

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} \Leftarrow \frac{٦}{٤} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} \Leftarrow \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{٣}{٢}$

فى Δ ء حـ ب

$\frac{\text{حـ ب}}{\text{حـ ء}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{٣}{٢}$

∵ $\frac{\text{حـ ب}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف ∠ حـ

مثال ٢ : أ ب حـ Δ فيه أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم نصفت الزاويتان أ ، ب بمنصفين تقاطعا فى م ورسم $\overleftrightarrow{\text{حـ م}}$ فقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى ء أوجد طول كلا من أ ء ، ء ب ، حـ ء

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ ب ، $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ أ

∴ $\overleftrightarrow{\text{حـ م}}$ ينصف ∠ حـ

∵ $\overline{\text{حـ ء}}$ ينصف ∠ حـ ∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{أء}}{\text{ء ب}}$

أ ء + ء ب = ٥ ⟸ أ ء = ٥ − ء ب

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{أء}}{\text{ء ب}} \Leftarrow \frac{٦}{٤} = \frac{٥ - \text{ء ب}}{\text{ء ب}}$

٦ ء ب = ٢٠ − ٤ ء ب

⟸ ٦ ء ب + ٤ ء ب = ٢٠

١٠ ء ب = ٢٠ ⟸ ء ب = $\frac{٢٠}{١٠}$ = ٢ سم

∴ أ ء = ٥ − ٢ = ٣ سم

∵ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ينصف ∠ حـ

∴ $\text{حـ ء} = \sqrt{\text{أ حـ} \times \text{ب حـ} - \text{أ ء} \times \text{ء ب}}$

$\text{حـ ء} = \sqrt{٦ \times ٤ - ٣ \times ٢} = \sqrt{٢٤ - ٦} = \sqrt{١٨}$

$\text{حـ ء} = \sqrt{١٨} = ٣\sqrt{٢}$

مثال ٣ : فى الشكل المقابل

أ ب جـ Δ فيه أ ب = ٣ سم ، أ جـ = ٤,٥ سم
ب جـ = ٥ سم ، ى ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب ى = ٢ سم
رسم ب هـ ⊥ أ ى ويقطع أ ى ، أ جـ
فى هـ ، ن على الترتيب
(١) أوجد طول أ ى
(٢) أوجد م(Δ أ ب ن) : م (Δ ب جـ ن)

الحل

∵ ب ى = ٢ سم ∴ ى جـ = ٥ − ٢ = ٣ سم

∵ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٣}{٤,٥} = \frac{٢}{٣}$ ∵ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$

∴ أ ى ينصف ∠ أ

∴ أ ى = $\sqrt{\text{ب أ × أ جـ - ب ى × ى جـ}}$

= $\sqrt{٣ × ٤,٥}$ - ٢ × ٣ = $\sqrt{١٣,٥ - ٦}$

= $\sqrt{٧,٥}$ = $\frac{\sqrt{١٥}}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٣٠}}{٢}$

فى الـ Δ أ ب ن :

∵ أ هـ ينصف ∠ أ ، أ هـ ⊥ ب ن

∴ Δ أ ب ن متساوي الساقين

∴ أ ب = أ ن = ٣ سم

∴ ن جـ = ٤,٥ − ٣ = ١,٥ سم

الـ Δ أ ب ن ، Δ ن ب جـ :

مثلثان لهما نفس الارتفاع لانهما مشتركان فى رأس واحدة وقاعدتيهما على نفس المستقيم

$\frac{\text{م(Δ أ ب ن)}}{\text{م(Δ ن ب جـ)}}$ = $\frac{\text{قاعدة الاول}}{\text{قاعدة الثاني}}$

∴ $\frac{\text{م(Δ أ ب ن)}}{\text{م(Δ ن ب جـ)}}$ = $\frac{\text{أ ن}}{\text{ن جـ}}$ = $\frac{٣}{١,٥}$ = ٢

مثال ٤ : ب جـ قطر فى الدائرة م ، جـ ى وترفيها

رسم ى أ مماس للدائرة عند ى فقطع جـ ب فى أ
فإذا كانت هـ ∈ ب جـ بحيث كان $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ ى}}{\text{ى هـ}}$
أثبت أن :
(١) ى جـ ينصف الزاوية الخارجة عند ى فى Δ أ ى هـ
(٢) $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

الحل

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ ى}}{\text{ى هـ}}$ ∴ ى ب ينصف ∠ أ ى هـ من الداخل

∵ ب جـ قطر فى الدائرة

∴ ق(ب ى̂ جـ)= ٩٠° لانها محيطية فى نصف دائرة

∴ جـ ى ⊥ ى ب

∵ ى ب ينصف ∠ أ ى هـ من الداخل ، جـ ى ⊥ ى ب

∴ ى جـ ينصف ∠ ى من الخارج

∵ ى جـ ينصف ∠ ى من الخارج ∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{أ ى}}{\text{ى هـ}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{أ ى}}{\text{هـ ى}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{هـ جـ}}$ ⟸ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

مثال ٥ : س ص ع Δ فيه ، ء منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ، نصفت ∠ س ء ص بالمنصف $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ الذي قطع $\overline{\text{س ص}}$ فى هـ ، ثم رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ ن}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ فقطع $\overline{\text{س ع}}$ فى ن

أثبت أن :

(١) $\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{س ء}}{\text{ء ع}}$ (٢) $\overleftrightarrow{\text{ء ن}}$ ينصف ∠ س ع ء

الحل

∵ ء منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ∴ ص ء = ء ع ——— (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ ينصف ∠ ص ء س ∴ $\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{س ء}}{\text{ء ص}}$ ——— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

$\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{س ء}}{\text{ء ع}}$ ——— (٣)

∵ $\overline{\text{هـ ن}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ∴ $\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ن ع}}$ ——— (٤)

من (٣) ، (٤) نجد أن :

$\frac{\text{س ن}}{\text{ن ع}} = \frac{\text{س ء}}{\text{ء ع}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ء ن}}$ ينصف ∠ س ء ع

مثال ٦ : فى الشكل المقابل

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\frac{\text{أ ص}}{\text{س م}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب م}}$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ينصف ∠ هـ أ ص

الحل

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$

∴ $\frac{\text{س م}}{\text{ب م}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{ن هـ}}$ ——— (١)

∵ $\frac{\text{أ ص}}{\text{س م}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب م}}$ ∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{س م}}{\text{ب م}}$ ——— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

∴ $\frac{\text{ص ن}}{\text{ن هـ}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{أ هـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ينصف ∠ هـ أ ص

تطبيقات التناسب فى الدائرة

(١) قوة نقطة بالنسبة للدائرة

قوة النقطة ؟ بالنسبة للدائرة م التي نصف قطرها نق هو العدد الحقيقي

و~م~(؟) = (؟م)^٢^ – نق^٢^

(١) التنبؤ من قوة النقطة بالنسبة للدائرة بموقعها من الدائرة

إذا كانت ؟ نقطه فى مستوي الدائرة م التي نصف قطرها نق

فإذا كان :

و~م~(؟) > ٠ (قيمة موجبة) فإن ؟ تقع خارج الدائرة

و~م~(؟) = ٠ فإن ؟ تقع علي الدائرة

و~م~(؟) < ٠ (قيمة سالبة) فإن ؟ تقع داخل الدائرة

(٢) قوة النقطة التي تقع خارج الدائرة والمماس لها

إذا كانت النقطة ؟ تقع خارج الدائرة

و ؟ء مماس لها عند ء

فإن :

و~م~(؟) = (؟م)^٢^ – نق^٢^

= (؟م + نق) (؟م – نق)

= ؟ب × ؟هـ = (؟ء)^٢^

⟸ ؟ء = √و~م~(؟)

أى ان طول المماس من نقطة خارج الدائرة = جذر قوة النقطة بالنسبة للدائرة

(٣) قوة النقطة التي تقع داخل الدائرة

إذا كانت النقطة ؟ تقع داخل الدائرة

و ؟ء مماس لها عند ء فإن :

و~م~(؟) = (؟م)^٢^ – نق^٢^

= (؟م - نق) (؟م + نق) =

⟸ و~م~(؟) = -؟ب × ؟جـ = -؟هـ × ؟ء

(٤) المحور الاساسي لدائرتين مختلفتين

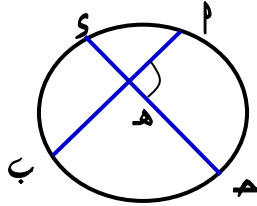
هو مجموعة النقاط التي لها نفس القوة بالنسبة للدائرتين

(٢) القاطع والمماس وقياسات الزوايا

مشهور ١

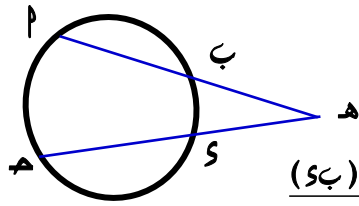
زاوية تقاطع وترين داخل الدائرة تساوي نصف حاصل جمع القوسين المقابلين لها

ففى الشكل المقابل :

ق(∠؟هـجـ) = [ق(؟جـ) + ق(بء)] / ٢

مشهور ٢

زاوية تقاطع وترين خارج الدائرة تساوي نصف حاصل طرح القوسين المقابلين لها

ففي الشكل المقابل:

ق(∠هـ) = [ق(؟جـ) – ق(بء)] / ٢

مشهور ٣

زاوية تقاطع مماس وقاطع او مماسان خارج دائرة تساوي نصف حاصل طرح القوسين المقابلين لها

فى الشكل المقابل :ـ

ق(∠؟) = [ق(بجـ) – ق(بء)] / ٢

ق(∠هـ) = [ق(ب س جـ) – ق(ب جـ)] / ٢

مثال ١ : حدد موقع النقط التالية بالنسبة للدائرة
م ، والتى طول نصف قطرها ١٠ سم ، ثم أحسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة
(١) ق~م~(أ) = -٣٦
(٢) ق~م~(ب) = ٩٦
(٣) ق~م~(هـ) = صفر

الحل

(١) ق~م~(أ) = -٣٦ ∴ أ داخل الدائرة

ق~م~(أ) = (أم)^٢^ – نق^٢^ = -٣٦
(أ م)^٢^ – (١٠)^٢^ = -٣٦
(أ م)^٢^ – ١٠٠ = -٣٦
⟸ (أ م)^٢^ = -٣٦ + ١٠٠ = ٦٤
أ م = √٦٤ = ٨ سم

(٢) ق~م~(ب) = ٩٦ ∴ ب خارج الدائرة

ق~م~(ب) = (بم)^٢^ – نق^٢^ = ٩٦
(ب م)^٢^ – (١٠)^٢^ = ٩٦
(ب م)^٢^ – ١٠٠ = ٩٦
⟸ (ب م)^٢^ = ٩٦ + ١٠٠ = ١٩٦
بم = √١٩٦ = ١٤ سم

(٣) ق~م~(هـ) = صفر ∴ هـ على الدائرة
∴ هـ م = ١٠ سم

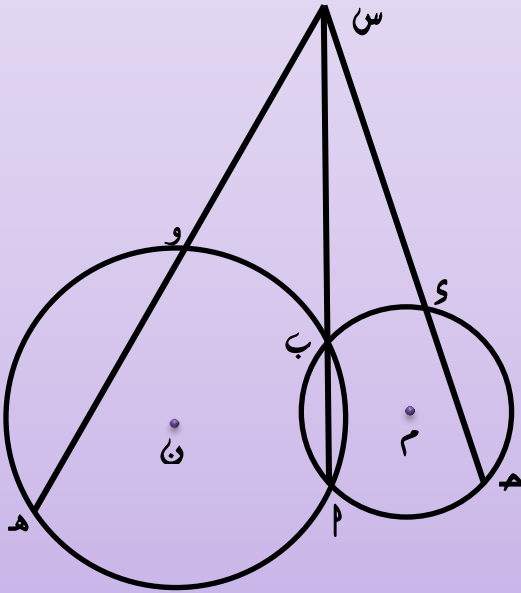
مثال ٢ : أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة الى الدائرة م ، والتى طول نصف قطرها نق
(١) النقطة أ حيث أ م = ١٢ سم ، نق = ٩ سم
(٢) النقطة ب حيث م ب = ٨ سم ، نق = ١٥ سم
(٣) النقطة هـ حيث هـ م = ٧ سم ، نق = ٧ سم

الحل

(١) ق~م~(أ) = (أم)^٢^ – نق^٢^
= (١٢)^٢^ - (٩)^٢^ = ١٤٤ – ٨١ = ٦٣

(٢) ق~م~(ب) = (بم)^٢^ – نق^٢^
= (٨)^٢^ – (١٥)^٢^ = ٦٤ – ٢٢٥ = -١٦١

(٣) ق~م~(هـ) = (هـم)^٢^ – نق^٢^
= صفر لأن النقطة على الدائرة

مثال ٣ : فى الشكل المقابل
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب بحيث
أب⃡ ∩ هـ ء⃡ ∩ هـ و⃡ = { س } ، س ء = ٢ ء هـ
، هـ و = ١٠ سم ، ق~ن~(س) = ١٤٤
(١) أثبت أن أ ب⃡ محور اساسي للدائرتين م ، ن
(٢) أوجد طول كلا من س هـ ، س و
(٣) أثبت أن الشكل هـ ء و هـ رباعي دائري

الحل

ق~م~(ب) = صفر لان ب تقع على الدائرة م
ق~ن~ (ب) = صفر لأن ب تقع على الدائرة ن
∴ ق~م~(ب) = ق~ن~ (ب)
∴ ب ∈ للمحور الاساسي للدائرتين —— (١)

ق~م~(أ) = صفر لان أ تقع على الدائرة م
= صفر لأن أ تقع على الدائرة ن
∴ ق~م~(أ) = ق~ن~ (أ)
∴ أ ∈ للمحور الاساسي للدائرتين —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :
أ ب⃡ هو المحور الاساسي للدائرتين
∵ س ∈ أ ب⃡ ∴ = ق~ن~ (س)

∴ ق~ن~ (س) = س و × س هـ = ١٤٤
س و × (س و + ١٠) = ١٤٤
(س و)^٢^ + ١٠ (س و) – ١٤٤ = ٠
(س و - ٨) (س و + ١٨) = ٠
س و = ٨ سم ، س و = -١٨ مرفوضة

∵ ق م(س) = س ء × س هـ = ١٤٤

= س ء × (س ء + ء هـ) = ١٤٤

∵ س ء = ٢ ء هـ

∴ س ء × (س ء + ء هـ) = ١٤٤

∴ ٢ ء هـ × (٢ ء هـ + ء هـ) = ١٤٤

٢ ء هـ × ٣ ء هـ = ١٤٤

٦ (ء هـ)^{٢} = ١٤٤ ⟸ (ء هـ)^{٢} = $\frac{١٤٤}{٦}$ = ٢٤

⟸ (ء هـ)^{٢} = ٢٤ ⟸ ء هـ = $\sqrt{٢٤}$ = ٢ $\sqrt{٦}$

∴ س هـ = س ء + ء هـ = ٢ ء هـ + ء هـ

= ٣ هـ ء = ٣ × ٢ $\sqrt{٦}$ = ٦ $\sqrt{٦}$ سم

مثال ٤ : الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠ سم ، أ نقطة تبعد عن المركز مسافة ١٦ سم ، رسم الوتر $\overline{\text{ب هـ}}$ حيث أ ∈ $\overline{\text{ب هـ}}$ ، أ ب = ٢ أ هـ

احسب طول الوتر $\overline{\text{ب هـ}}$

الحل

أ ء = ٢٠ − ١٦ = ٤ سم

ق م(أ) = − أ ء × أ هـ

= − ٤ × ٣٦ = − ١٤٤

ق م(أ) = − أ هـ × أ ب

= − أ هـ × ٢ أ هـ = − ٢ (أ هـ)^{٢}

∴ − ٢ (أ هـ)^{٢} = − ١٤٤

⟸ (أ هـ)^{٢} = $\frac{-١٤٤}{-٢}$ = ٧٢

∴ أ هـ = $\sqrt{٧٢}$ = ٦ $\sqrt{٢}$

∴ ب هـ = أ هـ + أ ب = أ هـ + ٢ أ هـ

= ٣ أ هـ = ٣ × ٦ $\sqrt{٢}$

= ١٨ $\sqrt{٢}$

مثال ٥ : مستعينا بمعطيات الشكل أوجد قيمة الرمز

(١)

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{هـ ء}}$ = { هـ }

∴ ق (هـ $\hat{\text{هـ}}$ ب) = $\frac{\text{ق(أ ء)} + \text{ق(هـ ب)}}{٢}$

س = $\frac{١٠٠ + ١٢٠}{٢}$ = ١١٠°

(٢)

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{هـ ء}}$ = { هـ }

∴ ق ($\hat{\text{هـ}}$) = $\frac{\text{ق(أ هـ)} - \text{ق(ب ء)}}{٢}$

$\frac{٣٠}{١}$ = $\frac{\text{س} - ٤٠}{٢}$

⟸ س − ٤٠ = ٢ × ٣٠

∴ س = ٦٠ + ٤٠ = ١٠٠°

(٣)

الحل

∵ أب مماس عند ب ، أهـ قاطع للدائرة

∴ $ق(\angle أ) = \frac{ق(ب هـ) - ق(ب ء)}{٢}$

∴ $\frac{٦٥}{١} = \frac{٣س + ٥ - ٥٥}{٢} = \frac{٣س - ٥٠}{٢}$

∴ ٣س − ٥٠ = ١٣٠

⟸ ٣س = ١٣٠ + ٥٠ = ١٨٠

⟸ $س = \frac{١٨٠}{٣} = ٦٠^\circ$

(٤)

الحل

∵ أب ، أهـ مماسان للدائرة عند ب ، هـ

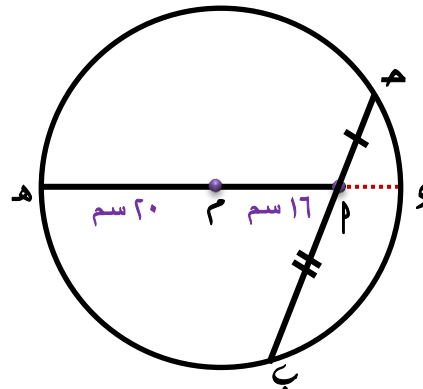
∴ ق(ب هـ) + ق(ب ء هـ) = ٣٦٠

∴ ١٣٠ + ٣س + ٥ = ٣٦٠

٣س = ٣٦٠ − ١٣٥ = ٢٢٥

$س = \frac{٢٢٥}{٣} = ٧٥^\circ$

∴ $ق(\angle أ) = \frac{ق(ب ء هـ) - ق(ب هـ)}{٢}$

$ع = \frac{٢٣٠ - ١٣٠}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠^\circ$

تدريبات على تطبيقات التناسب فى الدائرة

(١) حدد موقع النقط التالية بالنسبة للدائرة م ، والتى طول نصف قطرها ٧ سم ، ثم أحسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة

(١) ق م(أ) = −٢٤ (٢) ق م(ب) = ٧٢

(٣) ق م(هـ) = صفر

(٢) أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة الى الدائرة م ، والتى طول نصف قطرها نق

(١) النقطة أ حيث م أ = ١٠ سم ، نق = ٨ سم

(٢) النقطة ب حيث م ب = ١٠ سم ، نق = ١٢ سم

(٣) النقطة هـ حيث م هـ = ١٠ سم ، نق = ١٠ سم

(٣) إذا كان بعد نقطة عن مركز الدائرة = ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة يساوي ٤٠٠ ، أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة

(٤) فى الشكل المقابل

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب ، هـ ء مماس مشترك للدائرتين م ، ن عند ء ، هـ على الترتيب

ب أ ∩ ء هـ = { هـ }

(١) أثبت أن : ب هـ محور اساسي للدائرتين

(٢) إذا كان أ ب = ٩ سم ، ق ن(هـ) = ٣٦ ، أوجد طول هـ أ ، هـ ء

(٥) فى الشكل المقابل : ق(∠أ) = ٣٢ ، ق(ب ء هـ) = ٧٠ ، ق(أ ب) = ٩٤ ، ق(هـ ص) = ١٠٠ أوجد

(١) ق(س ص) (٢) ق(أ س) (٣) ق(هـ)